



TESIS - SM 142501

**ALIRAN TAK TUNAK FLUIDA NANO  
MAGNETOHIDRODINAMIK (MHD) YANG MELEWATI BOLA  
TERIRIS**

YUNITA NUR AFIFAH  
NRP 1214 2012 08

Dosen Pembimbing:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016





TESIS - SM 142501

**UNSTEADY FLOW NANO FLUID  
MAGNETOHYDRODYNAMIC (MHD) PAST A SLICED  
SPHERE**

YUNITA NUR AFIFAH  
NRP 1214 2012 08

Supervisor:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2016



Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
**Magister Sains (M.Si)**

di

**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh :

**Yunita Nur Afifah  
NRP 1214 201 208**

**Tanggal Ujian : 19 Juli 2016  
Periode Wisuda : September 2016**

Disetujui oleh:

1. **Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.**  
**NIP 19650605 198903 1 002**

**(Pembimbing I)**

2. **Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.**  
**NIP 19611115 198703 1 003**

**(Pembimbing II)**

3. **Dr. Mahmud Yunus, M.Si.**  
**NIP 19620407 198703 1 005**

**(Penguji)**

4. **Dr. Hariyanto, M.Si.**  
**NIP 19530414 198203 1 002**

**(Penguji)**

5. **Dr. Darmaji, S. Si., MT.**  
**NIP 19691015 199412 1 001**

**(Penguji)**

**Direktur Program Pascasarjana,**

**Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc, Ph.D.**  
**NIP. 19601202 198701 1 001**





# ALIRAN TAK TUNAK FLUIDA NANO MAGNETOHIDRODINAMIK (MHD) YANG MELEWATI BOLA TERIRIS

Nama Mahasiswa : Yunita Nur Afifah  
NRP : 1214 2012 08  
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

## ABSTRAK

Magnetohidrodinamik (MHD) adalah studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik (konduksi listrik) yang dipengaruhi oleh medan magnet. Fluida nano adalah campuran fluida cair sebagai fluida dasar dengan partikel nano *solid* berukuran kecil antara 1 – 100 nanometer (nm) yang terdapat didalamnya. Pada penelitian ini dibahas mengenai permasalahan aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris. Tahapan penelitian ini yaitu menentukan persamaan pembangun berdimensi, selanjutnya persamaan pembangun berdimensi yang terbentuk adalah persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi, Kemudian persamaan tersebut ditransformasikan kedalam bentuk persamaan non-dimensi dan selanjutnya ditransformasikan lagi ke dalam bentuk persamaan non-similar. Persamaan lapisan batas non-similar yang telah di dapat maka akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga dengan skema *Keller-Box*. Hasil penyelesaian numerik ini akan di analisis hubungan antara bilangan Prandtl ( $Pr$ ), parameter magnetik ( $M$ ), sudut pengirisan bola ( $\theta_s$ ), *volume fraction nano fluid* ( $\chi$ ) teradap profil kecepatan ( $f'$ ) dan temperatur ( $s$ ). Hasil tahap simulasi numerik menunjukkan bahwa profil kecepatan semakin besar dengan bertambahnya parameter magnetik, sedangkan profil temperatur menurun. Semakin besar nilai  $\eta$  maka semakin meningkat profil kecepatan variasi  $Pr$ , akan tetapi tidak terdapat pengaruh  $\eta$  secara signifikan terhadap nilai variasi  $Pr$  yang diberikan sedangkan temperatur semakin menurun. Semakin besar sudut irisan maka profil kecepatan semakin meningkat sedangkan profil temperatur semakin menurun, kemudian profil kecepatan dengan variasi *nanoparticle volume fraction* ( $\chi$ ) semakin meningkat pada saat nilai  $\chi$  adalah  $0 \leq \chi \leq 0.5$  dan semakin berkurang pada saat nilai  $\chi$  adalah  $0.6 \leq \chi \leq 0.9$ . sedangkan temperatur semakin meningkat.

**Kata kunci:** Magnetohidrodinamik (MHD), fluida nano, lapisan batas, metode beda hingga dengan skema *Keller-Box*





# UNSTEADY FLOW NANO FLUID MAGNETOHYDRODYNAMIC (MHD) PAST A SLICED SPHERE

Name : Yunita Nur Afifah  
NRP : 1214 2012 08  
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

## ABSTRACT

Magnetohydrodynamics (MHD) is a study of the movement of fluid flow that can conduct electricity (electric conduction) affected by magnetic fields. Nano fluid is a mixture of the liquid fluid with solid nano particles that the small solid nano particles sized between 1 – 100 nanometers (nm) are inside it. On the research discussed of the problems magnetohydrodynamics (MHD) was unsteady at nano fluid boundary layer that flows past over the sliced ball. The nano fluid flow which is influenced by the magnetic field evoke the boundary layer (boundary layer). Boundary layer (boundary layer) formed on the sliced ball will be examined and obtained then in the dimensional form builder equations. The dimensional builder equation is the continuity equation, momentum equation and energy equation. Then the equation is transformed into non-dimensional equations and then transformed again into non-similar equation. The non-similar boundary layer equation acquired then solved using numerical finite difference method with Keller-Box scheme. The results of numerical solution will be analyzed for the relationship between Prandtl's number ( $P_r$ ), magnetic parameters ( $M$ ), sliced sphere angle ( $\theta_s$ ), reservation angle ( $x$ ), volume fraction nano fluid ( $\chi$ ) towards the velocity profile ( $f'$ ) and the temperature profile ( $s$ ). The result of numerical simulation that the velocity profile be increased along with magnetic parameter, and the temperature profile are decreased when magnetic parameter. The greater the value of  $\eta$  then increasing the velocity profile variation  $Pr$ , however, there is no effect *eta* as significant to any given value variation  $Pr$  but the profil temperature is decreased. The greater the sliced angle so that velocity profile be increased but the temperature profile decrease. And then the velocity profile with variations *nanoparticle volume fraction* ( $\chi$ ) increases when the value  $\chi$  is  $0 \leq \chi \leq 0.5$  and decreases when the value  $\chi$  is  $0.6 \leq \chi \leq 0.9$ . while the temperature is increasing.

**Keywords:** magnetohydrodynamic (MHD), nano fluid, boundary layer, the finite difference method with Keller-Box scheme.



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
<b>BAB 1      PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Asumsi .....	4
1.5 Tujuan Penelitian .....	4
1.6 Manfaat Penelitian .....	5
<b>BAB 2      KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI</b>	<b>7</b>
2.1 Penelitian Sebelumnya .....	7
2.2 Fluida .....	9
2.2.1 Fluida <i>Newtonian</i> .....	10
2.2.2 Fluida <i>Non-Newtonian</i> .....	10
2.2.3 Fluida Nano .....	11
2.3 Viskositas .....	14
2.4 Aliran dan Lapisan Batas ( <i>Boundary Layer</i> ) .....	14
2.4.1 Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu .....	14
2.4.2 Aliran Fluida Pada Lapisan Batas .....	15
2.5 Magnetohidrodinamik .....	16
2.6 Metode Beda Hingga ( <i>Finite Difference Method</i> ) .....	18
2.6.1 Skema <i>Keller-Box</i> .....	18

BAB 3	METODA PENELITIAN	21
3.1	Tempat Penelitian	21
3.2	Tahapan Penelitian	21
3.2.1	Tahap analisa permasalahan	21
3.2.2	Tahap Implementasi Metode	23
3.2.3	Tahap Penyelesaian dan Analisa Akhir	24
BAB 4	MODEL MATEMATIKA	25
4.1	Persamaan Pembangun Model Matematika	26
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	26
4.1.2	Persamaan Momentum	29
4.1.3	Persamaan Energi	33
4.2	Model Matematika Dimensional	37
4.2.1	Penurunan Persamaan Pembangun	37
4.3	Model Matematika Non-Dimensional	38
4.4	Penyederhanaan Model Matematika Non-Dimensional pada Lapisan Batas	39
4.5	Fungsi Alir (Stream Function)	42
4.6	Persamaan Similaritas	44
4.6.1	Persamaan Similaritas pada Saat <i>Small Time</i>	44
4.6.2	Persamaan Similaritas pada Saat <i>Large Time</i>	46
4.7	Penurunan Kondisi Awal	48
BAB 5	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	51
5.1	Penyelesaian Numerik Model	51
5.1.1	Diskritisasi Model	51
5.1.2	Linierisasi Model	53
5.1.3	Teknik Eliminasi Blok	56
5.2	Hasil Simulasi Numerik	61
5.2.1	Pengaruh Variasi Parameter Magnetik	62
5.2.2	Pengaruh Nanopartikel Volume Fraction	63
5.2.3	Pengaruh Variasi Sudut Irisan	64
5.2.4	Pengaruh Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano	65
5.2.5	Pengaruh Variasi Densitas Fluida Nano	66
5.2.6	Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl	68
5.3	Physical Case	69
5.3.1	Pengaruh Parameter Magnetik	70

BAB 6	KESIMPULAN DAN SARAN	73
6.1	Kesimpulan .....	73
6.2	Saran .....	74
DAFTAR PUSTAKA		75
LAMPIRAN		77
6.1	Penurunan Persamaan Komponen Tegangan Normal dan Tegangan Geser pada Penyelesaian Persamaan Momentum Sumbu x dan y .....	77
6.2	Model Matematika Dimensional .....	79
6.3	Model Matematika Non-Dimensional .....	81
6.4	Penyederhanaan Model Matematika Non-Dimensional .....	91
6.5	Fungsi Alir ( <i>Stream Function</i> ) .....	95
6.6	Persamaan Similiaritas .....	97
6.7	Penurunan Kondisi Awal .....	105
6.8	Diskritisasi Model .....	114
6.9	Hasil Numerik .....	121
6.9.1	Physical Case .....	121



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Nano yang Mengalir Melewati Bola Teriris . .	2
Gambar 2.1	Model <i>Test</i> dalam <i>Test Section</i> . . . . .	8
Gambar 2.2	Klasifikasi Fluida . . . . .	11
Gambar 2.3	Stensil Skema <i>Keller-Box</i> . . . . .	19
Gambar 3.1	Model Fisik 3D dari Lapisan Batas Aliran Fluida Nano yang Mengalir Melewati Bola Teriris. . . . .	22
Gambar 3.2	Model Fisik dan Sistem Koordinat 2D dari Lapisan Batas Aliran Fluida Nano yang Mengalir Melalui Bola Teriris. . .	22
Gambar 4.1	Model Fisik dan Sistem Koordinat Untuk Fluida yang Melewati Bagian Permukaan Datar. . . . .	25
Gambar 4.2	Volume Atur . . . . .	27
Gambar 4.3	Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur . . . . .	28
Gambar 4.4	Gaya-gaya Permukaan dalam Arah x yang Bekerja pada Elemen Fluida . . . . .	31
Gambar 5.1	Stensil Beda Hingga . . . . .	52
Gambar 5.2	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0$ ) . . . . .	62
Gambar 5.3	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0$ ) . . . . .	63
Gambar 5.4	Profil Kecepatan dengan Variasi Nanopartikel Volume Fraction ( $\chi$ ) ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, M = 1$ . . . . .	63
Gambar 5.5	Profil Temperatur dengan Variasi Nanopartikel Volume Fraction ( $\chi$ ) ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, M = 1$ ) . . . . .	64
Gambar 5.6	Profil Kecepatan dengan Variasi Sudut Irisan ( $\theta_s$ ) ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0.1, M = 1$ ) . . . . .	64
Gambar 5.7	Profil Temperatur dengan Variasi Sudut Irisan ( $\theta_s$ ) ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0.1, M = 1$ ) . . . . .	65
Gambar 5.8	Profil Temperatur dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano ( $\rho C_{ND}$ ) . . . . .	66

Gambar 5.9	Profil Kecepatan dengan Variasi Densitas Fluida Nano ( $\rho_{ND}$ )	67
Gambar 5.10	Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ), ( $\theta_s = 53^\circ$ , $\chi = 0.1$ , $M = 1$ )	69
Gambar 5.11	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik	70
Gambar 5.12	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik	71
Gambar 5.13	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik	72
Gambar 5.14	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik	72
Gambar 6.1	Gabungan pada Aliran Tiga dimensi yang sama	87
Gambar 6.2	Skema Aliran Incompressible pada Bola	88



## DAFTAR TABEL

Tabel 5.1	Profil Kecepatan dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano ( $\rho C_{ND}$ ) ( $Pr = 0.7$ , $\theta_s = 53^\circ$ , $\chi = 0.2$ , $M = 1$ , dan $\rho_{ND} = 4$ ) .....	65
Tabel 5.2	Profil Temperatur dengan Variasi Densitas Fluida Nano ( $\rho_{ND}$ )	67
Tabel 5.3	Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) ( $\theta_s = 53^\circ$ , $\chi = 0.1$ , $M = 1$ ) .....	68
Tabel 5.4	Bahan Thermophysical Fluida Nano .....	69
Tabel 6.1	Profil Kecepatan dan Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) Pada Partikel Cu saat $\eta = 1$ ( $Pr = 0.7$ , $\theta_s = 53^\circ$ , $\chi = 0.2$ ) .....	121
Tabel 6.2	Profil Kecepatan dan Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) $Al_2O_3$ Pada Partikel $\eta = 1$ ( $Pr = 0.7$ , $\theta_s = 53^\circ$ , $Al_2O_3$ ( $M$ ) ( $Pr = 0.7$ , $\theta_s = 53^\circ$ , $\chi = 0.2$ ) ....	121



## DAFTAR SIMBOL

$\tau$	Tegangan geser ( $N/m^2$ )
$F_{geser}$	Gaya geser (N)
$A$	Luas Permukaan ( $m^2$ )
$\bar{V}$	Vektor kecepatan
$\mu$	koefisien viskositas fluida ( $N/m^2s$ )
$\frac{\partial u}{\partial x}$	gradien kecepatan fluida ( $s^{-1}$ )
$\mu_0$	Viskositas dinamik
$k_0$	Koefisien muatan
$d$	Laju perubahan tensor
$\hat{d}$	Variabel turunan konveksi
$\partial u$	Kecepatan aliran fluida
$\partial t$	Perubahan waktu
$\rho_{nf}$	Densitas fluida nano ( $kg/m^3$ )
$\alpha_{nf}$	Konduktifitas termal fluida nano
$\chi$	Nanopartikel volume fraction
$\rho_{bf}$	Densitas fluida dasar ( $kg/m^3$ )
$\rho_p$	Densitas partikel nano ( $kg/m^3$ )
$\rho_f$	Densitas fluida
$\rho_s$	Densitas partikel nano
$\mu_{eff}$	Viskositas efektif fluida nano
$k_{nf}$	Konduktivitas efektif fluida nano
$k_f$	Konduktifitas termal fluida
$k_s$	Konduktifitas termal partikel nano
$\nu_f$	Viskositas kinematikal fluida
$(\rho C_p)_{nf}$	Kapasitas panas fluida nano
$\rho_{ND}$	Densitas fluida nano non dimensional
$\rho C_{ND}$	Kapasitas panas fluida nano non dimensional
$\phi_p$	Fraksi volume dari partikel
$\mu_{bf}$	Viskositas dinamik fluida dasar
$\theta_s$	Sudut pengirisan
$Q_i$	Besar perpindahan kalor insidental
$Re$	Bilangan Reynolds
$Pr$	Bilangan Prandtl

$V_s$	Kecepatan rata-rata aliran fluida pada benda ( $\frac{m}{s}$ )
$d$	Panjang karakteristik ( $m$ )
$\nu$	Koefisien viskositas fluida ( $N/m^2s$ )
$\rho$	kerapatan (densitas) fluida ( $kg/m^3$ )
$T$	Temperatur
$U_\infty$	Aliran kecepatan
$B$	Medan magnet
$E$	Medan listrik
$V$	Kecepatan massal plasma
$J$	Kerapatan arus
$\rho$	Massa jenis
$p$	Tekanan fluida
$t$	Waktu
$\mu_0$	Permeabilitas ruang hampa
$M$	Parameter Magnetik
$a$	Jari-jari bola

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

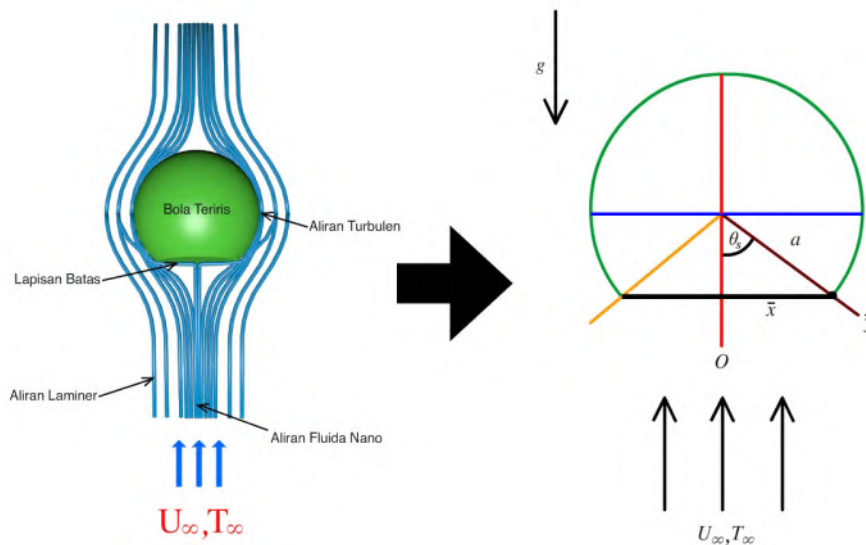
Magnetohidrodinamik (MHD) (dinamika fluida *magneto* atau *hydromagnetics*) adalah studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik (konduksi listrik) yang dipengaruhi oleh medan magnet. Aliran magnetohidrodinamika atau *Magnetohydrodynamic flow* (MHD) adalah penelitian yang penting dalam kaitannya dengan aplikasi bidang teknik dan industri. Power generator dan akselerator magnetohidrodinamik, pendingin reaktor nuklir dan pertumbuhan Kristal adalah pengembangan dari bidang MHD ini. Pada keadaan ini, hal yang utama adalah hubungan timbal-balik antara kecepatan aliran dan medan elektromagnet, yaitu aliran fluida yang menyebabkan adanya medan magnet dan medan magnet yang menyebabkan adanya aliran fluida. (Widodo dkk, 2015)

Lapisan batas atau Boundary layer adalah lapisan tipis pada permukaan padat atau solid surface yang terbatas pada daerah yang sangat sempit dekat dengan permukaan kontur dimana dipengaruhi oleh adanya viskositas maupun gaya inersia benda. Gaya inersia ini menunjukkan gaya yang diberikan oleh zat cair apapun berdasarkan keadaan geraknya. Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi dan aliran turbulen (Widodo, 2012).

Berdasarkan pengamatan dari pengaruh magnetohidrodinamik pada fluida mikrotub telah banyak dilaksanakan penelitian, misalnya oleh Narayana dkk (2013); Srinivasacharya dan Upendar (2013); dan Uddin dan Kumar (2013). Banyak kasus pada magnetohidrodinamik fluida mikrotub pada lapisan batas diamati sebagai kasus dalam keadaan tunak atau *steady-state*. Padahal pada lapisan batas, perubahan waktu amat berperan signifikan. Sementara itu, berbicara tentang aliran fluida yang melalui suatu bola padat, yang melibatkan gaya tarikan (gaya yang membuat suatu benda bergerak) yang timbul disekitarnya, kejadian ini dipahami melalui identifikasi pemisahan aliran dan hal tersebut terjadi untuk aliran tak tunak. (Widodo dkk, 2015)

Pada permasalahan yang nyata, berbagai macam fluida yang terjadi pada berbagai macam keadaan tidak selalu dapat dinyatakan sebagai fluida Newtonian (Widodo, 2012). Beberapa diantaranya kontradiksi dengan karakteristik fluida *Newtonian* dan jenis fluida ini biasa dikenal dengan fluida *Non-Newtonian*.

Fluida yang digunakan pada penelitian ini adalah fluida nano yang termasuk dalam fluida *Newtonian*. Istilah nano fluida berarti dua campuran fase, yaitu fase kontinu dan fase terdispersi. Fase kontinu biasanya adalah berupa cairan dan fase terdispersi adalah berupa partikel nano padat yang halus dan berukuran kecil antara 1 – 100 nanometer (nm). Fluida nano merupakan larutan yang mengandung partikel nano dengan ukuran 1 – 100 nm dalam fluida dasar. Dimana fluida nano merupakan campuran fluida kerja, dengan tujuan yaitu penambahan partikel nano ini dapat menaikkan temperatur, menaikkan luas permukaan perpindahan panas yang terjadi, dan juga menaikkan koefisien perpindahan panas.



Gambar 1.1: Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Nano yang Mengalir Melewati Bola Teriris

Berdasarkan ilustrasi dari Gambar 2.1 menunjukkan aliran fluida nano yang mengalir melewati bola teriris, Hal ini menimbulkan adanya lapisan batas (*Boundary Layer*) antara bola teriris dan aliran fluida tersebut yaitu daerah titik stagnasi ( $x = 0^\circ$ ). Sehingga dibangun persamaan lapisan batas dari hukum konservasi kekekalan massa, hukum Newton II, dan hukum termodinamika. Aliran

dari fluida pada permasalahan ini dianggap bergerak dari bawah kemudian melewati sebuah bola teriris dalam keadaan diam dengan sudut pengirisan ( $\theta_s$ ), jari-jari ( $a$ ), jarak daerah pengamatan terhadap permukaan bola teriris ( $y$ ), dan tak mampu-mampat dengan temperature disekitarnya adalah ( $T_\infty$ ). Pada penelitian ini, persamaan lapisan batas yang diperoleh berupa persamaan berdimensi, yaitu: persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Persamaan berdimensi tersebut kemudian ditransformasikan dalam bentuk persamaan non-dimensi. Kemudian mengubah bentuk non-dimensional ke persamaan similaritas. Sehingga didapatkan persamaan lapisan batas similar yang dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema *Keller-Box*. Selanjutnya dilakukan analisa hubungan dengan bilangan Prandtl ( $P_r$ ), parameter magnetik ( $M$ ), sudut pengirisan bola ( $\theta_s$ ), *volume fraction nano fluid* ( $\chi$ ), densitas fluida nano ( $\rho_{ND}$ ), dan kapasitas fluida nano ( $\rho C_{ND}$ ) terhadap profil kecepatan ( $f'$ ) dan temperatur ( $s$ ).

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka rumusan masalah yang dibahas dalam dalam usulan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika dari aliran tak tunak fluida nano magneto-hidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris?
2. Bagaimana penyelesaian numerik model matematika aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris dengan menggunakan Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*) skema *Keller-Box*?
3. Bagaimana pengaruh bilangan Prandtl ( $P_r$ ), parameter magnetik ( $M$ ), sudut pengirisan bola ( $\theta_s$ ), *volume fraction nano fluid* ( $\chi$ ), densitas fluida nano ( $\rho_{ND}$ ), dan kapasitas fluida nano ( $\rho C_{ND}$ ) terhadap profil kecepatan ( $f'$ ) dan temperatur ( $s$ ) pada aliran?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam usulan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bola teriris dalam keadaan diam.
2. Daerah yang diamati pada lapisan batas bola yang diiris yaitu pada titik stagnasi ( $x = 0^\circ$ )

3. Aliran fluida bergerak dari bawah ke atas yaitu tegak lurus dengan posisi bola teriris
4. Fluida yang diamati adalah fluida nano berkarakteristik Newtonian
5. Aliran fluida yang digunakan bersifat tak mampu-mampat (*incompressible*).
6. Pengirisan bola pada sudut  $45 \leq \theta_s \leq 90$
7. Bola teriris yang diamati terletak pada aliran bebas tanpa ada halangan didekat bola teriris.
8. Penyelesaian numerik menggunakan Metode Beda Hingga dengan skema *Keller-Box*.

#### 1.4 Asumsi

Asumsi dalam usulan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Aliran dalam kondisi tak tunak (*Unsteady*).
2. Pada bola teriris tidak terjadi induksi medan magnet.
3. Pada aliran fluida tidak terdapat tegangan listrik sehingga pada bola teriris memiliki medan listrik sama dengan nol.

#### 1.5 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah diatas, maka tujuan dari usulan penelitian ini adalah

1. Menyusun model matematika dari aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris di dalam fluida nano.
2. Mengembangkan solusi numerik dari model matematika aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris di dalam fluida nano dengan menggunakan Metode Beda Hingga dengan skema *Keller-Box*.
3. Menganalisis bilangan Prandtl ( $Pr$ ), parameter magnetik ( $M$ ), sudut pengirisan bola ( $\theta_s$ ), *volume fraction nano fluid* ( $\chi$ ), densitas fluida nano ( $\rho_{ND}$ ), dan kapasitas fluida nano ( $\rho C_{ND}$ ) teradap profil kecepatan ( $f'$ ) dan temperatur ( $s$ ) pada aliran.



## **1.6 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari usulan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Sebagai salah satu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika di bidang teknologi dan industri.
2. Sebagai salah satu bentuk kontribusi mengenai penerapan metode beda hingga khususnya metode beda hingga skema *Keller-Box* yang diterapkan pada model matematika aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris



## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bab ini menjelaskan mengenai penelitian sebelumnya yang digunakan dalam penelitian ini. Berikut adalah uraian dari penelitian-penelitian yang pernah dilakukan sebelumnya dan teori yang berkaitan dengan penyelesaian masalah dalam penelitian ini.

#### 2.1 Penelitian Sebelumnya

Adapun penelitian yang telah lakukan sebelumnya yang digunakan sebagai kajian pustaka dalam penelitian tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Choi (1995) : Orang pertama menggunakan istilah nanofluida yang menggunakan fluida cair dengan nano partikel tersuspensi didalamnya. Partikel CuO dan  $Al_2O_3$  berukuran nanometer dicampur dengan fluida cair diantaranya air dan ethyleneglycol. Dari hasil penelitian diperoleh peningkatan termal konduktivitas sebesar 20%. Peningkatan konduktivitas termal sekitar 60% dapat dicapai untuk nanofluida terdiri dari air dan volume 5% nanopartikel (CuO).
2. Pujanarsa(2006) : Studi eksperimental tentang pengaruh sudut putar terhadap gaya angkat untuk berbagai sudut potong pada bola.

Dimana

$F_L$  : Gaya angkat

$\rho_\infty$  : Massa jenis aliran bebas

$\mu_\infty$  : Viskositas aliran bebas

$V_\infty$  : Kecepatan aliran bebas

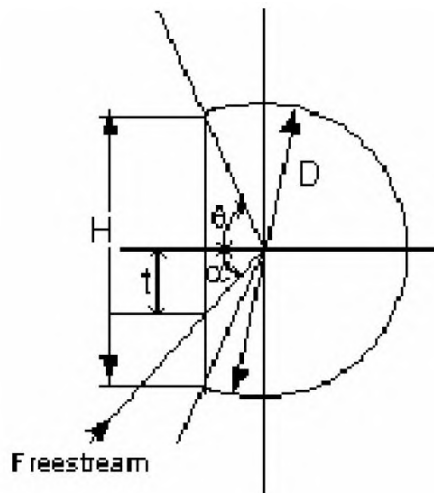
$D$  : Diameter bola

$H$  : Tinggi pemotongan

$t$  : Tarak titik pada bola terkena aliran datang terhadap garis horisontal melalui pusat bola

$\alpha$  : Sudut putar / sudut pengamatan

Sudut-sudut potong besarnya yaitu,  $\theta$ :  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $53^\circ$ ,  $55^\circ$ , dan  $75^\circ$ . Adanya sudut putar aliran ini akan menghasilkan gaya yang searah aliran (yaitu gaya tahanan) dan gaya yang tegak lurus aliran (yaitu gaya angkat). Hasil



Gambar 2.1: Model *Test* dalam *Test Section*

eksperimen pada bola teriris menunjukkan bahwa gaya tahanan naik bila sudut putar naik. Gaya tahanan ini mencapai nilai maksimum pada sudut potong tertentu, dan setelah sudut potong tersebut gaya tahanan turun

3. Liu dan Yu : (2010) Melakukan penelitian mengenai karakteristik perpindahan kalor fluida nano  $Al_2O_3/air$  pada saluran mini dibawah kondisi fluks kalor konstan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa koefisien perpindahan kalor dan bilangan Nusselt fluida nano lebih tinggi dari fluida dasarnya dan meningkat seiring dengan meningkatnya bilangan Reynolds dan laju aliran. Penggunaan fluida nano sebagai fluida kerja transfer kalor dapat dikatakan sangat baik karena hasil penelitian menunjukkan peningkatan koefisien perpindahan kalor yang tinggi.
4. Kasim (2014) : Aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga dengan skema *Keller-Box*.
5. Mohammad (2014) : Aliran lapisan batas MHD tak tunak, telah dijelaskan beberapa permasalahan yang membahas mengenai aliran konveksi paksa maupun aliran konveksi campuran pada fluida kental yang melewati bola. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh adanya medan magnet terhadap profil kecepatan, profil temperatur dan *skin friction*. Pada penelitian tersebut juga dijelaskan bahwa nilai parameter magnetik jika ditingkatkan atau diperbesar maka dapat meningkatkan ketebalan dari lapisan batas. Dengan meningkatnya parameter magnetik didapatkan bahwa kecepatan yang

dihasilkan semakin meningkat, dan temperatur semakin menurun.

6. Alkasasbeh (2015) : Membahas tentang banyak permasalahan salah satunya yaitu aliran fluida nano konveksi campuran pada lapisan batas yang melewati bola dalam keadaan *steady*. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh *nanopartikel volume fraction* terhadap temperatur dan kecepatan. Pada penelitian tersebut juga dijelaskan bahwa ketika nilai *nanopartikel volume fraction* ditingkatkan maka nilai parameter konjugate meningkat, temperatur meningkat tetapi kecepatan menurun.

## 2.2 Fluida

Terdapat tiga fase zat yang tersebar di alam, yaitu fase padat, gas, dan cair. Karena fase gas dan cair tidak dapat mempertahankan bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut dengan fluida. Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun tegangan geser tersebut (Widodo, 2012). Tegangan geser adalah perbandingan gaya geser dengan luas permukaan sedangkan gaya geser adalah komponen gaya yang menyinggung permukaan secara matematis ditulis dalam bentuk:

$$\tau = F_{geser}/A$$

dengan

$\tau$  = tegangan geser ( $N/m^2$ )

$F_{geser}$  = Gaya geser (N)

$A$  = Luas Permukaan ( $m^2$ )

Perbedaan zat cair dan gas ialah zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*), sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan adalah perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan tekanan. Secara karakteristik fluida dibagi menjadi dua yaitu fluida *Newtonian* dan fluida *Non-Newtonian*.

Untuk fluida pada umumnya, tegangan dan laju regangan geser (gradient kecepatan) dapat dikaitkan dalam suatu hubungan dalam bentuk

$$\tau = \mu \dot{\theta}$$

### 2.2.1 Fluida Newtonian

Fluida Newtonian adalah suatu fluida yang memiliki kurva tegangan/regangan yang linier. Keunikan dari fluida *Newtonian* adalah fluida ini akan terus mengalir sekalipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Fluida *Newtonian* memiliki viskositas yang hanya dipengaruhi perubahan temperatur dan tekanan saja sehingga viskositas fluida tersebut adalah konstan, dan tidak bergantung pada besar gradien kecepatan. Contoh Fluida *Newtonian* adalah air, udara, gliserin, oli, benzana, dan lain sebagainya. Secara matematis persamaan dari fluida Newtonian mengikuti hukum Newton tentang aliran yang ditulis sebagai berikut.

$$\tau = \mu \frac{du}{dx} ; (\text{linier})$$

dengan

$\tau$  = tegangan geser ( $N/m^2$ )

$\mu$  = koefisien viskositas fluida ( $N/m^2 s$ )

$\frac{du}{dx}$  = gradien kecepatan yang arahnya tegak lurus dengan arah geser ( $s^{-1}$ )

### 2.2.2 Fluida Non-Newtonian

Fluida *Non-Newtonian* adalah fluida yang tidak tahan terhadap tegangan geser (*shear stress*), gradien kecepatan (*shear rate*), dan temperatur. Fluida *Non-Newtonian* tidak akan terus mengalir ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut sehingga viskositas fluida akan berubah (tidak konstan). Contoh Fluida *Non-Newtonian* adalah fluida plastik padat, fluida eksponensial, fluida viskoelastik, fluida tiksotropik, dan fluida rheopektik. Seperti lumpur, cat, minyak pelumas, darah, obat-obatan cair, dll. Secara matematis persamaan dari fluida *Non-Newtonian* tidak mengikuti hukum Newton tentang aliran yang ditulis sebagai berikut (tegangan geser fluida *Walter-B*)

$$\tau = \mu_{\theta}(d) - k_{\theta}(2\dot{d})$$

dengan,

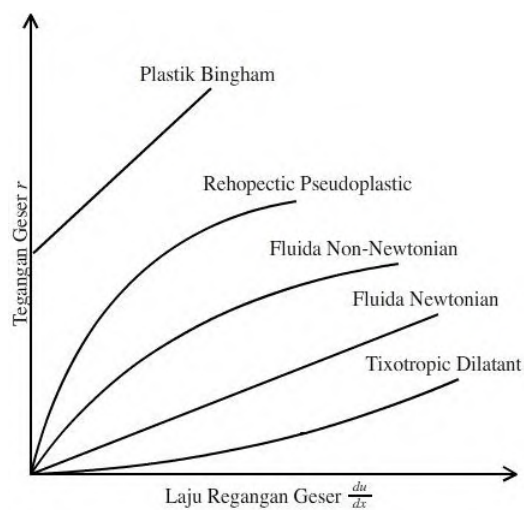
$\mu_\theta$  = viskositas dinamik

$k_\theta$  = koefisien muatan

$\mathbf{d}$  = laju perubahan tensor

$\hat{d}$  = variabel turunan konveksi

Berdasarkan kedua uraian tentang karakteristik suatu fluida diatas, perbedaan antara fluida yang berkarakteristik *Newtonian* dan *Non-Newtonian* adalah linier dan tidaknya antara tegangan geser dengan gradien kecepatannya. Hal ini diperjelas melalui gambar yang menunjukkan kurva antara tegangan geser dengan gradient kecepatan fluida yang berkarakteristik *Newtonian* dan *Non-Newtonian* (Potter, 2008)



Gambar 2.2: Klasifikasi Fluida

### 2.2.3 Fluida Nano

Fluida yang digunakan pada penelitian ini adalah fluida nano yang termasuk dalam fluida *Newtonian*. Perkembangan nano teknologi baru ini telah mengarah pada kelas fluida baru dan agak khusus yang disebut dengan fluida nano. Istilah nano fluida berarti dua campuran fase, yaitu fase kontinu dan fase terdispersi. Fase kontinu biasanya adalah berupa cairan dan fase terdispersi adalah berupa partikel nano padat yang halus dan berukuran kecil antara 1 – 100 nanometer (nm). Fluida nano merupakan larutan yang mengandung partikel nano dengan ukuran

1 – 100 nm dalam fluida dasar. Partikel nano biasanya terbuat dari logam yang secara kimia stabil, oksida logam atau karbon dalam berbagai bentuk (Ramadhan, 2012). Variasi tipe partikel nano yang baru ini diteliti menggunakan logam (*metal*) dan logam oksida (*metal oxide*) adalah CuO (*Copper oxide*),  $Al_2O_3$  (*Aluminium oxide*),  $ZrO_2$  (*Zirconium dioxide*), SiC (*Silicon carbide*),  $SiO_2$  (*Silicon dioxide*),  $TiO_2$  (*Titanium oxide*), dan ZnO (*Zinc oxide*) (Azmi W.H dkk, 2015). Ukuran dari partikel nano memberikan karakteristik yang unik terhadap fluida. Fluida nano adalah campuran fluida cair sebagai fluida dasarnya dengan partikel solid berukuran 1-100 nm. Fluida nano yang menggunakan fluida cair dengan partikel nano didalamnya, contoh fluida cair diantaranya adalah air, oli, dan ethyleneglycol. Model partikel nano yang di teliti baru ini adalah model partikel nano diam (*stationary particle model*), yang ketergantungan pada konsentrasi volume dan ukuran partikel. Kemudian model partikel bergerak (*moving particle model*) yang menjelaskan tentang ketergantungan yang kuat akan temperatur pada medium dihubungkan dengan variasi kecepatan partikel nano dengan temperaturnya. Telah banyak penelitian pengembangan tentang fluida nano yang dapat digunakan sebagai pendingin reaktor, pendingin pada elektronik, dll.

Partikel dalam ukuran nanometer ini menyebabkan meningkatnya interaksi dan tumbukan antar partikel, fluida dan permukaan yang dilaluinya, adanya fluktuasi pencampuran dan turbulensi dari fluida yang meningkat serta gradien temperatur dari fluida yang mengecil. Ada dua teknik pencampuran fluida nano yaitu teknik pertama, nano partikel dibuat dan dicampurkan ke dalam fluida dasar secara bersamaan dan teknik kedua, pembuatan nano partikel dan pencampuran partikel tersebut dilakukan terpisah. Akan tetapi kedua teknik tersebut memperoleh hasil yang baik hanya untuk partikel nano oksida dan tidak untuk partikel nano logam (Choi, 1995). Secara teoritis, fluida nano memiliki perbedaan yang lebih besar dibandingkan dari fluida kerja biasa seperti air. Dimana fluida nano merupakan campuran fluida kerja, yaitu penambahan partikel nano ini dapat menaikkan temperatur, menaikkan luas permukaan perpindahan panas yang terjadi, dan juga menaikkan koefisien perpindahan panas.

Secara *Physical Case* Perlu diperhatikan densitas dari partikel nano untuk mendapatkan perbandingan campuran yang tepat. Pada penelitian sebelumnya digunakan persentase volum untuk menentukan konsentrasi campuran. Volume partikel ditentukan dengan menggunakan densitas sebenarnya dari partikel nano dan massanya dengan mengabaikan massa udara yang terpertangkap di dalamnya.



## Sifat-Sifat Fluida Nano

### 1. Densitas Fluida Nano

Densitas adalah kerapatan atau massa jenis suatu fluida dan dapat didefinisikan sebagai massa suatu zat per satuan volume.

$$\rho_{nf} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s$$

dimana  $\rho_{nf}$  adalah densitas fluida nano ( $kg/m^3$ ), *nanopartikel volume fraction* adalah  $\chi$ , dan  $\rho_f$  adalah densitas fluida dasar ( $kg/m^3$ ),  $\rho_s$  adalah densitas partikel nano ( $kg/m^3$ ). Persamaan diatas didapat dari korelasi Pak dan Cho (1998), yang diambil dalam Alkasasbeh (2015).

### 2. Viskositas

Pada penelitian ini, viskositas yang dipakai adalah viskositas dinamik yang didapatkan dari perhitungan prediksi menggunakan persamaan dari *Brinkman equation* yaitu:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \chi)^{2.5}}$$

dimana  $\mu_{nf}$  adalah viskositas fluida nano, viskositas fluida dasar adalah  $\mu_f$ , dan *nanopartikel volume fraction* adalah  $\chi$

### 3. Kalor spesifik fluida nano

Definisi kalor spesifik fluida nano yaitu jumlah energi yang dibutuhkan untuk menaikan satu satuan massa zat pada suhu satu derajat Celcius, kalor spesifik fluida nano pada tekanan konstan ( $c_p$ ,  $n_f$ ) dapat diestimasi berdasarkan korelasi dari Xuan dan Roetzel (2000) sebagai berikut:

$$c_{p,nf} = ((1 - \phi)\phi_{bf}c_{(p_{bf})} + \phi\rho_p c_{(p_p)})/\rho_{nf}$$

Dimana  $c_p$ ,  $n_f$ ,  $c_{(p_{bf})}$ ,  $c_{(p_p)}$  berturut turut adalah kalor spesifik fluida nano, kalor spesifik fluida dasar, dan kalor spesifik partikel ( $kJ/kg.K$ ), fraksi volume dari partikel adalah  $\phi$ ,  $\phi_{bf}$ ,  $\rho_p$ , dan  $\rho_{nf}$  berturut-turut adalah densitas dari fluida dasar, partikel nano, serta fluida nano ( $kg/m^3$ )

### 4. Konduktifitas termal

Konduktivitas termal adalah suatu besaran intensif bahan yang menunjukkan kemampuannya untuk menghantarkan panas. di dalam fluida nano dapat di

rumuskan sebagai berikut:

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{(k_s + 2k_f) - 2x(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + x(k_f - k_s)}$$

## 2.3 Viskositas

Viskositas adalah ukuran kekentalan fluida yang menyatakan besar kecilnya gesekan di dalam fluida. Makin besar viskositas suatu fluida, makin sulit fluida mengalir dan makin sulit suatu benda untuk bergerak dalam fluida tersebut. Oleh karena itu, viskositas dari suatu fluida dapat menjelaskan ketahanan internal fluida untuk mengalir dan dapat digunakan untuk menganalisa pengukuran dari pergeseran suatu fluida. Viskositas zat cair secara umum berkurang sejalan dengan peningkatan suhu. Sedangkan viskositas gas secara umum bertambah sejalan dengan peningkatan suhu. Hal ini dapat dikatakan bahwa Viskositas zat cair berbanding terbalik dengan suhu zat, sedangkan viskositas gas berbanding lurus dengan suhu suatu zat. Semua fluida (kecuali superfluida) memiliki ketahanan dari tekanan sehingga disebut kental, tetapi fluida yang tidak memiliki ketahanan tekanan dan tegangan disebut fluida ideal.

## 2.4 Aliran dan Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

### 2.4.1 Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu

Tipe aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap kriteria waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu: (Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady Flow*) Aliran tunak yaitu kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady Flow*) Aliran tak tunak yaitu kecepatan aliran fluida yang dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

#### 2.4.2 Aliran Fluida Pada Lapisan Batas

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi dan aliran turbulen (Widodo, 2012).

##### 1. Aliran Laminar

Pada aliran ini partikel-partikel zat cair bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi apabila bilangan Reynolds kurang dari 500 ( $Re < 500$ ) atau pada saat fluida bergerak dengan kecepatan kecil dan atau fluida memiliki viskositas (kekentalan) yang besar.

##### 2. Aliran Transisi

Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen. Terjadinya masa transisi antara aliran laminar dan turbulen disebabkan adanya perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran transisi terjadi apabila bilangan Reynolds antara 500 sampai 12.500 ( $500 < Re < 12.500$ ).

##### 3. Aliran Turbulen

Aliran turbulen terjadi pada saat partikel-partikel zat cair bergerak secara acak atau tidak teratur. Aliran turbulen terjadi apabila bilangan Reynolds lebih dari 12.500 ( $Re > 12.500$ ). Bilangan Reynolds untuk suatu aliran dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$Re = \frac{V_s d}{\nu} = \frac{\rho V_s d}{\mu}$$

dengan

$Re$  = bilangan Reynolds

$V_s$  = kecepatan rata-rata aliran fluida pada benda ( $m/s$ )

$d$  = panjang karakteristik (m)

$\nu$  = koefisien viskositas fluida ( $N/m^2s$ )

$\rho$  = kerapatan (densitas) fluida ( $kg/m^3$ )

$\mu$  = viskositas absolut fluida dinamis ( $N/m^2s$ )

Lapisan batas atau *boundary layer* adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir. Lapisan batas atau boundary layer adalah suatu lapisan tipis yang terbentuk pada benda (penelitian ini bola teriris) karena suatu viskositas yang menyebabkan fluida melekat ke permukaan (Potter, 2008). Tebal lapisan batas terdiri atas lapisan batas kecepatan dan lapisan batas termal. Tebal lapisan batas kecepatan ( $\delta$ ) adalah jarak yang diukur dari permukaan benda sampai suatu titik dimana efek viskositas sudah tidak berpengaruh lagi. Tebal lapisan batas termal ( $\delta_T$ ) adalah jarak yang diukur dari permukaan benda sampai suatu titik dimana efek perpindahan panas sudah tidak berpengaruh (Faruk, 2012).

## 2.5 Magnetohidrodinamik

Magnetohidrodinamik (MHD) berasal dari kata *magneto* yang berarti medan magnet, *hydro* yang berarti cairan atau fluida dan *dynamics* yang berarti perubahan atau pergerakan. Magnetohidrodinamik adalah suatu penghantar dan pergerakan suatu fluida yang dipengaruhi oleh medan magnet yang memiliki efisiensi tinggi dan polusi rendah. Contoh fluida yang dapat menghantarkan listrik adalah plasma, logam cair, dan elektrolit. Konsep dasar dari MHD yaitu jika aliran dari fluida terkena medan magnet maka aliran fluida itu sendiri akan memiliki interaksi gaya sesuai dengan arah kutub magnet. Persamaan yang menggambarkan MHD merupakan kombinasi dari persamaan persamaan *Navier-Stokes* pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik.

Persamaan dasar yang dibutuhkan untuk membentuk ideal persamaan MHD adalah persamaan kontinuitas, persamaaan momentum, persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Adapun persamaan tersebut sebagai berikut.

Pada permasalahan MHD Persamaan (2.2) pada persamaan Maxwell tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan dan Persamaan (2.2) hanya digunakan pada kondisi awal (*initial condition*). Selain itu, untuk frekuensi/kecepatan rendah, perpindahan arus bisa diabaikan (Arber, 2013). Sehingga, persamaan umum MHD dapat dirumuskan sebagai berikut :

Persamaan momentum:

$$\rho \left( \frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Persamaan Maxwell:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

dengan

$B$  = medan magnet

$E$  = medan listrik

$V$  = kecepatan fluida

$J$  = kerapatan arus

$\rho$  = massa jenis

$p$  = tekanan fluida

$t$  = waktu

$\mu_0$  = permeabilitas ruang hampa ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )

Pada permasalahan MHD pada persamaan Maxwell tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan. Selain itu, untuk frekuensi/kecepatan rendah, perpindahan arus bisa diabaikan (Arber, 2013). Sehingga, persamaan umum MHD dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial t} &= -\nabla \times E \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) &= 0 \\
\nabla \times B &= \mu_0 J \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0
\end{aligned}$$

dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan formulasi berikut:

$$E + v \times B = \eta J$$

jika  $\eta = 0$  maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

## 2.6 Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Dalam matematika, metode beda hingga (FDM) adalah metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial menggunakan persamaan beda hingga untuk mendekati derivatif. Metode beda hingga secara umum memiliki tiga pendekatan yaitu beda maju, beda pusat dan beda mundur. Berikut ini akan disajikan macam-macam metode beda hingga yaitu:

### a. Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

### b. Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

### c. Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

#### 2.6.1 Skema Keller-Box

Metode *Keller-Box*) adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode *Keller-Box* ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan difer-

ensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu. Berikut adalah contoh mengubah persamaan diferensial orde dua menjadi orde satu:

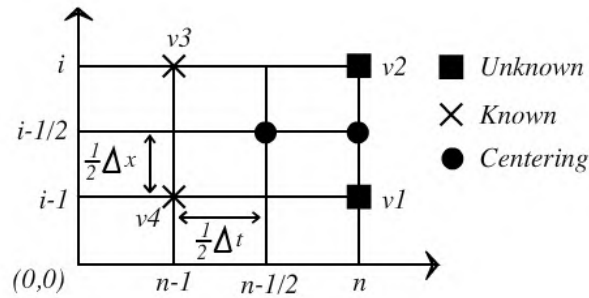
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan mendefinisikan

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga bentuk persamaan orde kedua tersebut dapat dituliskan menjadi dua persamaan orde pertama sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$



Gambar 2.3: Stensil Skema *Keller-Box*

Berdasarkan bentuk skema *Keller-Box* pada Gambar 2.3 untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = v_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (2.1)$$

$$2 \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} = \frac{\alpha(v_i^n - v_{i-1}^n)}{\Delta x_i} + \frac{\alpha(v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})}{\Delta x_i} \quad (2.2)$$

Karena menggunakan titik-titik pada step size setengah maka berlaku

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2} \\ v_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{v_i^n + v_i^{n-1}}{2} \end{aligned}$$

secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} ()_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}[(())_i^n + ()_i^{n-1}] \\ ()_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}[(())_i^n + ()_{i-1}^n] \end{aligned}$$

Selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan (2.1) dan (2.2) didapatkan

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = \frac{v_i^n + v_{i-1}^n}{2} \quad (2.3)$$

$$2 \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta t_n} = \alpha \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x_i} + \alpha \frac{v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1}}{\Delta x_i} + 2 \frac{u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t_n} \quad (2.4)$$

Berdasarkan hasil pada Persamaan (2.3) dan (2.4), selanjutnya dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks tridiagonal.



## **BAB 3**

### **METODA PENELITIAN**

Pada bab ini menjelaskan tempat dan tahapan penelitian mengenai aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris. Tempat dan tahapan yang dimaksud yaitu sebagai berikut.

#### **3.1 Tempat Penelitian**

Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

#### **3.2 Tahapan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah yang ada, penelitian ini terdiri dari tiga tahap, yaitu tahap analisa permasalahan, tahap implementasi metode, dan tahap penyelesaian dan analisa akhir.

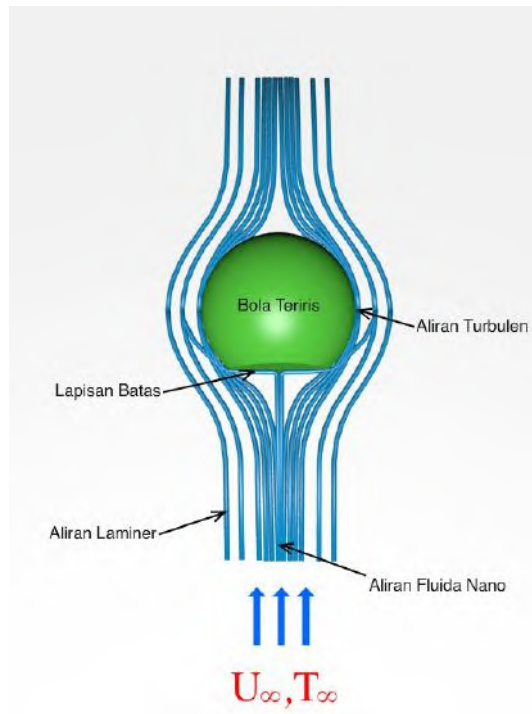
##### *3.2.1 Tahap analisa permasalahan*

Aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris di ilustrasikan pada gambar tiga dimensi berikut ini.

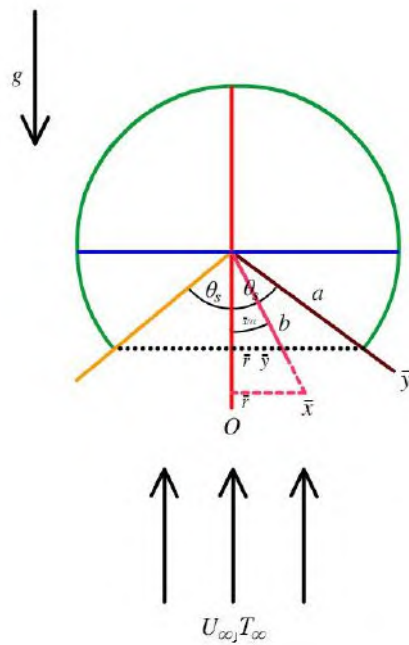
Berdasarkan pada Gambar 3.1 diketahui bahwa fluida nano bergerak dari bawah ke atas melewati permukaan sebuah bola teriris dalam keadaan diam dengan jari-jari  $a$ , dengan kecepatan ambient fluid ( $U_{\infty}$ ) kondisi tak tunak (*unsteady*), dan bersifat tak mampu-mampat (*incrompressible*).

Pada penelitian ini fluida nano memiliki pengaruh besar pada fluida *Newtonian*. Penelitian ini dilakukan pada daerah lapisan batas dengan membangun tiga aliran tiga hukum fisika, yaitu hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika. Pada penelitian ini model yang dibangun adalah model matematika didaerah lapisan batas dari bola teriris pada fluida nano. Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan permukaan benda. Kemudian aliran fluida nano yang melalui permukaan bola teriris diilustrasikan pada gambar dua dimensi berikut ini,

Untuk menjawab perumusan masalah yang ada, maka langkah-langkah berikut ini.



Gambar 3.1: Model Fisik 3D dari Lapisan Batas Aliran Fluida Nano yang Mengalir Melewati Bola Teriris.



Gambar 3.2: Model Fisik dan Sistem Koordinat 2D dari Lapisan Batas Aliran Fluida Nano yang Mengalir Melalui Bola Teriris.

1. Studi literatur
2. Membangun model matematika aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris. berdasarkan penurunan hukum konservasi massa, hukum II newton, dan hukum I termodinamika.
3. Penyederhanaan persamaan pembangun dengan menggunakan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun yang berdimensi dari aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris
4. Menentukan kondisi batas (boundary condition) dari model matematika aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris

### 3.2.2 Tahap Implementasi Metode

Tahap ini dilakukan implementasi metode beda hingga skema Keller-Box yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini. Persamaan yang didiskritisasi dengan metode ini adalah persamaan similaritas, yang mana persamaan similaritas dari model ini didapatkan dengan melakukan beberapa tahapan berikut:

1. Mendapatkan Persamaan persamaan kontinuitas, momentum, dan energi dalam bentuk persamaan berdimensi berdasarkan hukum konservasi massa, hukum II newton, dan hukum I termodinamika selanjutnya disederhanakan dan ditranformasikan ke dalam bentuk non-dimensi menggunakan parameter non-dimensi. Dengan  $M$  dan  $Pr$  adalah parameter tak berdimensi. Parameter-parameter tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \quad (\text{Parameter Magnetik})$$

$$Pr = \frac{v_f}{\alpha_p} \quad (\text{Bilangan Prandtl})$$

2. Mengubah bentuk non-dimensional ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir (*stream function*) pada bola teriris.

Persamaan similaritas model pada titik stagnasi terendah ( $x \approx 0$ ) adalah sebagai berikut

a.) Persamaan Momentum

$$\left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} + \left[ (1 - \chi) + \left( \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f''' + \frac{3}{2 \cos \alpha} t \left( 1 - (f')^2 - f f'' \right) + Mt(1 - f') = t \frac{f''}{\partial t} \quad (3.1)$$

b.) Persamaan Energi

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \left[ (1 - \chi) + \frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right]} s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' + \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t f s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Tahap Penyelesaian dan Analisa Akhir

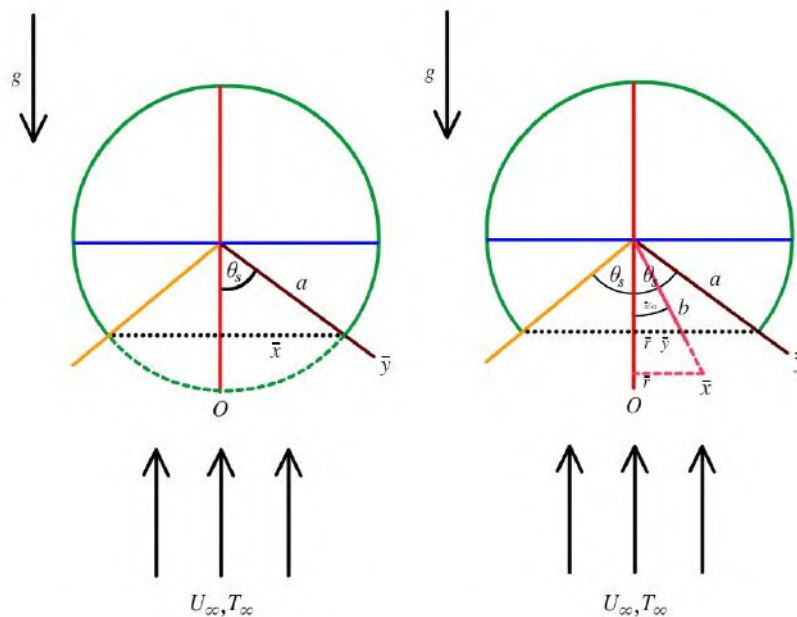
1. Pada tahap ini, peneliti menyelesaikan model matematika dengan membuat program simulasi berdasarkan hasil diskritisasi dengan menggunakan software Matlab 2013a.
2. Menganalisa hubungan antara beberapa parameter-parameter terhadap karakteristik fluida dengan hasil simulasi yang telah dilakukan.

## BAB 4

### MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini dijelaskan tentang model matematika dari aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris dalam bentuk model matematika dimensional, kemudian ditransformasikan ke bentuk model matematika non-dimensional dan selanjutnya dibentuk dalam model matematika non-similar. Persamaan pembangun yang digunakan untuk membangun model didapatkan dari penurunan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika. Hasil penurunan tersebut membentuk tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi.

Model fisik dan sistem koordinat aliran fluida nano yang mengalir melewati bola teriris pada daerah sekitar medan magnet. Gambar dikonstruksi dengan memperhatikan arah aliran fluida, sudut irisan bola, sudut pengamatan, dan medan magnet.



Gambar 4.1: Model Fisik dan Sistem Koordinat Untuk Fluida yang Melewati Bagian Permukaan Datar.

Pada gambar diatas, dapat diketahui bahwa kecepatan aliran fluida sebelum melewati bola teriris adalah  $U_{\infty}$ , sudut pengirisan adalah  $\alpha$  sudut serang sudut pengamatan adalah  $x$ , jarak daerah pengamatan terhadap permukaan bola teriris adalah  $y$ , jari-jari bola teriris adalah  $a$ , dan medan magnet. Pada penelitian ini melibatkan fluida nano yang akan diperhatikan parameter fluida nano, akan tetapi di dalam penelitian ini tidak dialiri listrik sehingga tidak terjadi induksi medan magnet pada fluida dan pada bola teriris. Aliran pada fluida ini dalam keadaan tak tunak (*unsteady*) dan *incompressible*. Aliran pada fluida nano yang melewati permukaan sebuah bola teriris ini membentuk lapisan batas, dan dari lapisan batas tersebut selanjutnya dikonstruksi model matematika.

#### 4.1 Persamaan Pembangun Model Matematika

Persamaan pembangun adalah persamaan yang diuraikan dari lapisan batas yang terbentuk didekat permukaan bola teriris akibat dari aliran fluida yang melewati bola teriris. Persamaan pembangun yang digunakan didapatkan dari Hukum Kekekalan Massa, Hukum II Newton dan Hukum I Termodinamika. Berikut adalah uraian untuk persamaan pembangun yang digunakan membangun model.

##### 4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas dibangun dari hukum kekekalan massa. Konsep dari hukum kekekalan massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem sama dengan nol atau jumlah massa dalam suatu sistem adalah konstan. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut (Potter dkk,2012):

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan  $\frac{D()}{Dt}$  disebut sebagai turunan material dan  $M_{sys}$  adalah massa sistem yang sama dengan jumlah dari semua perkalian antara densitas fluida dengan volume fluida pada sistem tersebut yang dinyatakan dengan

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho_{nf} dV \quad (4.2)$$

dengan  $\rho_{nf}$  adalah densitas fluida dan  $V$  adalah volume fluida. Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.2) pada Persamaan (4.1) didapatkan bentuk:

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{nf} dV = 0 \quad (4.3)$$

Dengan menggunakan teorema pengangkutan Reynolds, laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{nf} dV + \int_{cs} \rho_{nf} \bar{V} \cdot \hat{n} dH \quad (4.4)$$

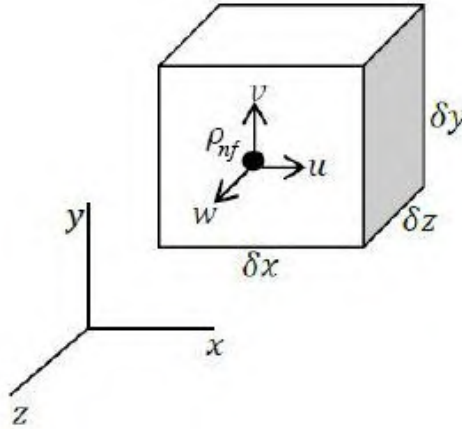
sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.3) didapatkan

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{nf} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{nf} dV + \int_{cs} \rho_{nf} \bar{V} \cdot \hat{n} dH \quad (4.5)$$

dengan  $\bar{V} \cdot \hat{n} dH$  merupakan perkalian dari komponen kecepatan  $\bar{V}$  yang tegak lurus terhadap suatu bagian kecil permukaan atur dan bidang diferensial  $dH$ . Jadi  $\bar{V} \cdot \hat{n} dH$  merupakan laju dari aliran volume yang melalui  $dH$  dan  $\rho_{nf} \bar{V} \cdot \hat{n} dH$  laju aliran massa melalui  $dH$ . Sehingga persamaan volume atur untuk kekekalan massa dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{nf} dV + \int_{cs} \rho_{nf} \bar{V} \cdot \hat{n} dH = 0 \quad (4.6)$$

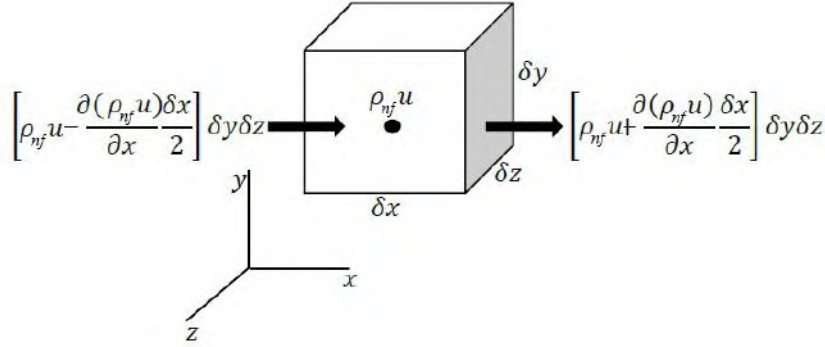
Dimisalkan volume atur yang digunakan berupa sebuah elemen kubus kecil



Gambar 4.2: Volume Atur

dalam keadaan diam seperti pada Gambar 4.2. Pada bagian pusat elemen terdapat densitas  $\rho_{nf}$  dan komponen kecepatan  $u$ ,  $v$ , dan  $w$ . Karena elemen diasumsikan kecil, maka laju perubahan terhadap waktu dari massa dari kandungan volume atur yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{nf} dV \approx \frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.7)$$



Gambar 4.3: Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur

Jumlah aliran massa pada permukaan elemen dapat diperoleh dari aliran sumbu koordinat yang digambarkan secara terpisah. Seperti pada Gambar 4.3, aliran pada sumbu- $x$  digambarkan dengan jumlah massa dari aliran yang masuk dan keluar dari bagian pusat elemen, sehingga pada aliran yang keluar didefinisikan:

$$\rho_{nf}u \Big|_{x+\frac{\delta x}{2}} = \rho_{nf}u + \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.8)$$

sedangkan untuk bagian aliran yang masuk

$$\rho_{nf}u \Big|_{x-\frac{\delta x}{2}} = \rho_{nf}u - \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.9)$$

Sehingga jumlah aliran massa yang keluar pada arah- $x$  dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\left[ \rho_{nf}u + \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ \rho_{nf}u - \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.10)$$

Dengan langkah yang sama, didapatkan aliran massa yang keluar pada arah- $y$  berikut ini:

$$\left[ \rho_{nf}v + \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[ \rho_{nf}v - \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.11)$$

dan aliran massa yang keluar pada arah- $z$  adalah

$$\left[ \rho_{nf}w + \frac{\partial(\rho_{nf}w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[ \rho_{nf}w - \frac{\partial(\rho_{nf}w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho_{nf}w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.12)$$



Sehingga total aliran dapat ditulis sebagai berikut

$$\left[ \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{nf}w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.13)$$

Jadi laju terhadap perubahan waktu dari massa sistem yaitu

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[ \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{nf}w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.14)$$

kedua ruas dibagi dengan  $\delta x \delta y \delta z$  didapatkan:

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{nf}w)}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa aliran fluida yang dianalisa adalah aliran fluida pada bidang  $xoy$ , sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

Persamaan (4.16) dapat ditulis dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \rho_{nf}(\nabla \cdot \bar{V}) = 0 \quad (4.17)$$

Karena pada penelitian ini fluida bersifat *incompressible* yang berarti bahwa densitas fluida tidak bergantung terhadap waktu ( $\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} = 0$ ) sehingga persamaan kontinuitas diberikan sebagai berikut

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (4.18)$$

dengan  $\bar{V} = (u, v, 0)$

#### 4.1.2 Persamaan Momentum

Selain persamaan kontinuitas, persamaan momentum berperan dalam pembentukan model aliran fluida. Karena pada saat suatu fluida bergerak maka akan terjadi suatu momentum. Prinsip dari persamaan momentum adalah hukum II Newton, yaitu perubahan momentum dari suatu sistem yang berubah terhadap waktu sama dengan jumlah gaya yang bekerja pada sistem tersebut. Hukum II Newton ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{Gaya} = \text{Massa} \times \text{Percepatan}$$

maka momentum dari sebuah partikel kecil  $\rho_{nf} d\mathcal{V}$  adalah  $\bar{V} \rho_{nf} d\mathcal{V}$ , sehingga momentum dari seluruh sistem adalah  $\int_{sys} \rho_{nf} \bar{V} d\mathcal{V}$ . Secara matematis Hukum II Newton dapat ditulis sebagai berikut (Potter *dkk*, 2012):

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{nf} \bar{V} d\mathcal{V} = \sum F \quad (4.19)$$

dengan menggunakan Teorema Transport Reynolds, laju perubahan terhadap waktu dari momentum sistem sama dengan jumlahan laju perubahan terhadap waktu dari momentum kandungan volume atur dan laju aliran netto dari momentum melewati permukaan atur, yang dapat dituliskan sebagai

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{nf} \bar{V} d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho d\mathcal{V} \mathbf{n} + \int_{cs} \rho \bar{V} \cdot \hat{n} dH \cdot \bar{V} \quad (4.20)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.20) ke Persamaan (4.19) didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{nf} \bar{V} d\mathcal{V} + \int_{cs} \rho_{nf} \bar{V} (\bar{V} \cdot \hat{n}) dH = \sum F \quad (4.21)$$

dengan  $\mathbf{v} \cdot \hat{n}$  merupakan bentuk skalar yang terjadi disetiap luasan  $dH$ . Bentuk integral permukaan kendali menunjukkan flux momentum net yang melewati permukaan kendali fluida yang masuk maupun keluar volume kendali.

Berdasarkan persamaan kontinuitas, Persamaan (4.21) dapat dibentuk dalam notasi vektor yaitu

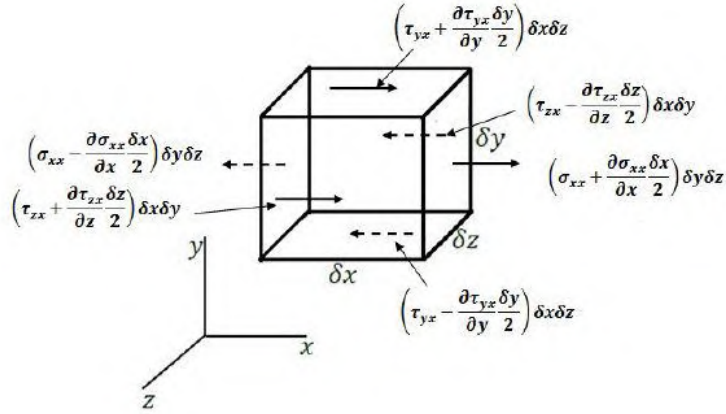
$$\rho_{nf} \left( \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\bar{V} \bar{V}) \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.22)$$

Berdasarkan sifat difergensi bahwa  $\nabla \cdot (\bar{V} \bar{V}) = (\bar{V} \cdot \nabla \bar{V}) + (\bar{V} (\nabla \cdot \bar{V}))$  karena  $\nabla \cdot \bar{V} = 0$  maka  $\nabla \cdot (\bar{V} \bar{V}) = \bar{V} \cdot \nabla \bar{V}$ , sehingga Persamaan (4.22) menjadi

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.23)$$

Dengan  $\sum F$  menunjukkan komponen gaya-gaya yang bekerja pada permukaan silinder eliptik. Komponen gaya-gaya tersebut adalah gaya permukaan, gaya apung dan gaya magnet. Dengan demikian Persamaan (4.23) dapat ditulis sebagai berikut

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \right) \delta x \delta y \delta z = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{mag} \quad (4.24)$$



Gambar 4.4: Gaya-gaya Permukaan dalam Arah x yang Bekerja pada Elemen Fluida

dimana  $\mathbf{F}_s$  adalah gaya permukaan,  $\mathbf{F}_{mag}$  adalah gaya magnet. Pada Persamaan (4.24) kedua ruas dibagi dengan  $\delta x \delta y \delta z$  sehingga didapatkan

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \right) = \frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} + \frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} \quad (4.25)$$

Gaya permukaan atau  $\mathbf{F}_s$  bekerja pada elemen sebagai hasil interaksinya dengan sekelilingnya. Gaya-gaya permukaan yang bekerja pada sebuah elemen kubus kecil dari sebuah fluida dalam bentuk tegangan-tegangan yang bekerja pada permukaan seperti pada Gambar 4.4. Dapat dinyatakan tegangan-tegangan pada berbagai permukaan dalam bentuk tegangan-tegangan pada berbagai permukaan dalam bentuk tegangan-tegangan yang bersesuaian pada pusat elemen. Dengan menjumlahkan seluruh gaya pada arah- $x$  dapat diuraikan sebagai berikut

$$\mathbf{F}_{sx} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.26)$$

dan gaya dalam arah  $y$

$$\mathbf{F}_{sy} = \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.27)$$

Sehingga dapat dituliskan resultan gaya permukaan yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \mathbf{F}_{sx} \hat{i} + \mathbf{F}_{sy} \hat{j} \\ \frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} &= \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Untuk fluida Newtonian tak mampu-mampat, diketahui bahwa tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi dan dapat dinyatakan sebagai berikut

**a. Tegangan normal**

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.29)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu_{nf} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.30)$$

**b. Tegangan geser**

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{nf} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.31)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.29) - (4.31) pada Persamaan (4.28) diperoleh

$$\frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} = -\nabla p + \mu_{nf} \nabla^2 \bar{V} \quad (4.32)$$

Selain gaya permukaan yang bekerja, juga terdapat gaya Lorentz dalam persamaan momentum karena adanya medan magnet, maka Gaya Lorentz dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.33)$$

dengan  $\mathbf{E}$  adalah medan listrik,  $\mathbf{J}$  massa jenis arus, dan  $\mathbf{B}$  adalah total medan magnet. Massa jenis arus dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \bar{V} \times \mathbf{B}) \quad (4.34)$$

yang mana  $\sigma$  adalah konduktifitas listrik. Jika disubstitusikan Persamaan (4.34) ke Persamaan (4.33) didapatkan

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \mathbf{E} + \sigma(\mathbf{E} + \bar{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.35)$$

karena pada penelitian ini aliran tidak mengandung arus listrik maka  $\mathbf{E} = 0$ , sehingga Persamaan (4.35) menjadi

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \sigma(\bar{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.36)$$

dengan menggunakan indentitas vektor maka Persamaan (4.36) dapat dituliskan

sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} &= \sigma \{ (\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \bar{\mathbf{V}} \} \\ &= \sigma \{ (\|\bar{\mathbf{V}}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta_{\bar{\mathbf{V}}\mathbf{B}}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \bar{\mathbf{V}} \}\end{aligned}\quad (4.37)$$

karena  $\mathbf{B}$  adalah total medan magnet yang merupakan jumlahan dari medan magnet yang teraplikasikan yaitu  $B_0$  dengan medan magnet yang terinduksi yaitu  $\mathbf{b}$ , atau dapat dituliskan secara matematis yaitu

$$\mathbf{B} = B_0 + \mathbf{b}$$

Oleh karena bilangan Reynold magnetiknya diasumsikan kecil maka induksi magnet  $\mathbf{b}$  dapat dihilangkan, sehingga medan magnet  $\mathbf{B}$  dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{B} = B_0 \quad (4.38)$$

dengan  $\theta_{\mathbf{uB}} = \pi/2$ , maka gaya Lorentz pada Persamaan (4.37) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = -\sigma B_0^2 \bar{\mathbf{V}} \quad (4.39)$$

selanjutnya (4.24) didapatkan persamaan momentum sebagai berikut

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} - \sigma B_0^2 \bar{\mathbf{V}} \quad (4.40)$$

Atau dapat dituliskan dengan

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} \right) = -\frac{1}{\rho_{nf}} \nabla p + v_{nf} \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} - \frac{1}{\rho_{nf}} \sigma B_0^2 \bar{\mathbf{V}} \quad (4.41)$$

dimana  $\frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} = v_{nf}$

#### 4.1.3 Persamaan Energi

Pada penelitian ini tidak hanya persamaan kontinuitas dan persamaan momentum saja yang digunakan akan tetapi juga digunakan persamaan energi. Persamaan energi karena ada pengaruh panas akibat tumbukan antar partikel pada fluida. Fenomena ini menunjukkan berlakunya hukum I Termodinamika mengenai energi total yang tersimpan dari suatu sistem. Hukum tersebut dapat dituliskan dalam persamaan energi menurut Alkassabeh, H. T., (2015)

$$(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})T = \alpha_{nf} \nabla^2 T \quad (4.42)$$

dimana

$\rho_{nf}$  adalah densitas fluida nano

$\rho_{infy}$  adalah densitas lokal  $\bar{V}$  adalah vektor kecepatan

$\bar{\nabla}$  adalah operator Laplace

$g$  adalah percepatan gravitasi

$\mu_{nf}$  adalah kekentalan fluida nano

$\alpha_{nf}$  adalah konduktifitas termal fluida nano

$T$  adalah temperatur lokal

$T_{infy}$  adalah temperatur ambient

$p$  adalah tekanan fluida

Karena *unsteady flow* maka persamaan dari (Alkasasbeh, 2015) menjadi

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})T = \alpha_{nf} \nabla^2 T \quad (4.43)$$

Hukum pertama Termodinamika untuk sebuah sistem adalah laju pertambahan terhadap waktu dari energi total yang tersimpan dari suatu sistem sama dengan laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem ditambah dengan laju netto pertambahan dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho_{nf} dV = \left( \sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out} \right)_{sys} + \left( \sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out} \right)_{sys}$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho_{nf} dV = \left( \dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto} \right)_{sys} \quad (4.44)$$

Energi total yang tersimpan per satuan massa dari setiap partikel di dalam sistem ( $e$ ), dihubungkan dengan energi dalam per satuan massa ( $\tilde{u}$ ), energi kinetik per satuan massa ( $\frac{V^2}{2}$ ), dan energi potensial per satuan massa ( $gz$ ), diperoleh persamaan

$$e = \tilde{u} + \frac{V^2}{2} + gz \quad (4.45)$$

karena volume kendali untuk hukum pertama termodinamika berimpit dengan

sebuah sistem, maka diperoleh persamaan menurut Teorema Transport Reynolds yaitu

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho_{nf} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho_{nf} dV + \int_{cs} e \rho (\bar{V} \cdot \hat{n}) dH \quad (4.46)$$

Dengan menyubstitusikan Persamaan (4.46) dengan (4.44) didapatkan bentuk volume kendali untuk hukum I Termodinamika sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho_{nf} dV + \int_{cs} e \rho_{nf} (\bar{V} \cdot \hat{n}) dH = \left( \dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto} \right)_{cv} \quad (4.47)$$

Karena pada penelitian ini benda dianggap diam maka tidak terjadi usaha pada sistem, maka  $\dot{W} = 0$ , sehingga Persamaan (4.47) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho_{nf} dV + \int_{cs} e \rho_{nf} (\bar{V} \cdot \hat{n}) dH = \left( \dot{Q}_{innetto} \right)_{cv} \quad (4.48)$$

atau dalam bentuk persamaan volume kendali yaitu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho_{nf} dV + \int_{cs} \nabla \cdot (e \rho_{nf} \bar{V}) dV = \int_{cv} \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) dV + \int_{cv} \dot{q} dV \quad (4.49)$$

Dengan  $\nabla \cdot (k_{nf} \nabla T)$  adalah konduksi panas yang terjadi pada volume kendali dan  $\dot{q}$  adalah sumber panas (*heat generation*). Karena pada penelitian ini tidak terdapat sumber panas pada volume kendali maka  $\dot{q} = 0$ , sehingga Persamaan (4.49) dapat ditulis

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \bar{V}) \right) = \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) \quad (4.50)$$

berdasarkan sifat divergensi diketahui bahwa (Sen, 1996):

$$\nabla \cdot (e \bar{V}) = \bar{V} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \bar{V}) \quad (4.51)$$

dengan mensubstitusikan persamaan kontinuitas pada Persamaan (4.51) didapatkan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e \bar{V} &= \bar{V} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \bar{V}) \\ &= \bar{V} \cdot (e \bar{V}) + 0 \\ &= \bar{V} \cdot (\nabla e) \end{aligned}$$

maka Persamaan (4.47) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \bar{V} \cdot (\nabla e) \right) = \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) \quad (4.52)$$

Menurut Lienhard(2002) pengaruh dari tekanan dan perubahan kerapatan dapat diabaikan karena dalam sistem tekanan konstan (tetap), sehingga perubahan dari energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut

$$\partial e = \partial h - \partial \left( \frac{P}{\rho} \right) \approx \partial h \quad (4.53)$$

dengan menyubstitusikan  $\partial h \approx (C_p)_{nf} \partial T$  ke Persamaan (4.52), sehingga didapat:

$$(\rho C_p)_{nf} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) \quad (4.54)$$

dengan

$$\nabla \cdot (T \bar{V}) = \bar{V} \cdot (\nabla T) + T \cdot (\nabla \bar{V})$$

sesuai dengan persamaan kontinuitas, maka

$$\nabla \cdot (T \bar{V}) = \bar{V} \cdot (\nabla T) \quad (4.55)$$

kemudian disubstitusikan Persamaan (4.55) ke Persamaan (4.54), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(\rho C_p)_{nf} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) \quad (4.56)$$

$$(\rho C_p)_{nf} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot (\nabla T) \right) = k_{nf} \nabla^2 T \quad (4.57)$$

dengan

$$\begin{aligned} \bar{V} \cdot (\nabla T) &= (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} \right) \\ &= \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T) &= k_{nf} \nabla^2 T \\ &= k_{nf} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} \right) \right] \\ &= k_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$



Maka Persamaan (4.57) menjadi

$$(\rho C_p)_{nf} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.58)$$

Atau dapat dituliskan dengan

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.59)$$

dengan  $\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}$

## 4.2 Model Matematika Dimensional

### 4.2.1 Penurunan Persamaan Pembangun

. Daerah yang diteliti adalah aliran fluida yang melewati permukaan datar bola teriris, sehingga persamaan pembangun model dapat dituliskan sebagai berikut:

a.) Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.61)$$

b.) Persamaan momentum dalam arah sumbu - x

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 \bar{u}}{\rho_{nf}} \quad (4.62)$$

c.) Persamaan momentum dalam arah sumbu - y

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 \bar{v}}{\rho_{nf}} \quad (4.63)$$

d.) Persamaan Energi

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.64)$$

Tanda ' - ' menandakan bahwa variabel- variabelnya merupakan variabel berdimensi.

Pada penelitian ini menggunakan kondisi awal dan kondisi batas untuk  $0 \leq x \leq \theta_s$

$$\begin{aligned}
\bar{t} &< 0; \\
\bar{u} = \bar{v} &= 0, \text{ untuk setiap } x \cdot y \\
\bar{t} &\geq 0; \\
\bar{u} = \bar{v} &= 0, T \longrightarrow T_\infty, \text{ pada saat } \bar{y} = b - a \\
\bar{u} &= \bar{u}_e(x), T \longrightarrow T_\infty, \text{ pada saat } y \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

Dimana  $\bar{u}_e = \frac{3}{2}U_\infty \sin\left(\frac{x}{b}\right)$  di dalam (Anderson, John., D : 2011)

### 4.3 Model Matematika Non-Dimensional

Untuk merubah model matematika dimensional menjadi model matematika non-dimensional maka diberikan variabel-variabel non-dimensional untuk mempermudah proses komputasinya. Maka bentuk variabel-variabelnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\bar{x}}{a} \\
y &= R_e^{1/2} \left| \frac{\bar{y}}{a} \right| \\
R_e &= \frac{u_\infty a}{\nu} \\
u &= \frac{\bar{u}}{U_\infty} \\
v &= R_e^{1/2} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right) \\
\nu &= \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \\
u_e(x) &= \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{U_\infty} \\
r(x) &= \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a} \\
p &= \frac{\bar{p}}{\rho_{nf} U_\infty^2} \\
t &= \frac{a}{U_{inf} \bar{t}} \\
\theta &= \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan-persamaan diatas ke dalam model matematika dimensional maka model matematika non dimensional untuk aliran yang melewati permukaan datar bola teriris dapat dituliskan sebagai berikut:

a.) Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.65)$$

b.) Persamaan momentum dalam arah sumbu - x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + v_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu \quad (4.66)$$

c.) Persamaan momentum dalam arah sumbu - y

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} Mv \quad (4.67)$$

d.) Persamaan Energi

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.68)$$

Kondisi awal dan kondisi batas untuk  $0^\circ \leq x \leq \theta_s$  diberikan sebagai berikut:

$$\bar{t} < 0 \text{ maka } t < 0$$

$$\bar{t} \geq 0 \text{ maka } t \geq 0$$

$$t < 0 : u = v = 0, \text{ saat } x, y$$

$$t \geq 0 : u = v = 0, \text{ maka } y = 0$$

$$u = u_e(x), T \longrightarrow T_\infty, \text{ pada saat } y \longrightarrow \infty$$

$$\text{Dimana } u_e = \frac{3}{2} \sin \left( x \frac{\cos \alpha}{\cos x} \right), \text{ dan } b = \frac{\cos \alpha}{\cos x} a$$

#### 4.4 Penyederhanaan Model Matematika Non-Dimensional pada Lapisan Batas

Dengan menyederhanakan model matematika non-dimensional yang dilakukan dengan menggunakan pendekatan lapisan batas dimana bilangan Reynold  $Re \longrightarrow \infty$  sehingga berakibat  $Re \longrightarrow 0$ . Dari kondisi ini maka model matematika non-dimensional selanjutnya dapat dituliskan sebagai berikut:

a.) Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.69)$$

b.) Persamaan Momentum Sumbu x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu \quad (4.70)$$

c.) Persamaan Momentum Sumbu y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.71)$$

d.) Persamaan Energi

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.72)$$

Pada persamaan momentum sumbu y terlihat bahwa tekanan fluida  $p$  adalah variabel bebas terhadap  $y$  sehingga dapat disimpulkan bahwa tekanan aliran hanya bergantung pada variabel  $x$ , maka persamaan momentum dan persamaan energi yang digunakan sebagai pembangun model pada penelitian ini yaitu :

a.) Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu \quad (4.73)$$

b.) Persamaan Energi

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.74)$$

Langkah selanjutnya sebagai berikut:

- 1.) substitusikan variabel  $v_{nf}$  dengan variabel  $\frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}}$  kemudian mensubstitusikan lagi variabel  $\mu_{nf}$  dan variabel  $\rho_{nf}$  dengan variabel-variabel non-dimensional sebagai berikut:

$$\rho_{nf} = (1 - x)\rho_f + x\rho_s$$

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - x)^{2.5}}$$

- 2.) Substitusikan variabel  $v_f$  dengan variabel  $\frac{\mu_f}{\rho_f}$

- 3.) Substitusikan variabel  $\alpha_{nf}$  dengan variabel-variabel sebagai berikut  $\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}$

- 4.) Karena Non-Dimensional maka  $\frac{\rho_s}{\rho_f} = \rho_{ND}$  dan  $\frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} = \rho C_{ND}$ .

Sehingga pada fluida yang melewati permukaan bola pada daerah di luar lapisan batas persamaan momentum dan persamaan energi di atas dapat ditulis sebagai berikut:

a.) Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \frac{\rho_s}{\rho_f})]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M u_e \quad (4.75)$$

b. Persamaan Energi

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2x(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + x(k_f - k_s)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.76)$$

Karena kecepatan aliran bebas  $u_e = \frac{3}{2}(x \frac{\cos x}{\cos \alpha})$  maka diperoleh

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.77)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.77) maka didapatkan persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M u_e \quad (4.78)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan tersebut maka didapatkan persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M u_e - M u \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u_e - u) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.80)$$

Dari penyederhanaan Model Matematika Non-Dimensional maka dapat ditulis sebagai berikut

a.) Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.81)$$

$$(4.82)$$

b.) Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5}[(1 - \chi) + (\chi \rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u_e - u) \quad (4.83)$$

c.) Persamaan Energi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi \rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.84)$$

Untuk kondisi Awal dan kondisi batas  $0^\circ \leq x \leq \theta_s$

$t < 0; u = v = 0$ , untuk setiap  $x, y$

$t \geq 0; u = v = 0$ , pada saat  $y = 0$

$u = u_e(x), T \rightarrow T_\infty$ , pada saat  $y \rightarrow \infty$

Dimana  $u_e = \frac{3}{2} \sin \left( x \frac{\cos \alpha}{\cos x} \right)$ , dan  $b = \frac{\cos \alpha}{\cos x} a$

Dengan  $M$  dan  $Pr$  adalah parameter-parameter non-dimensi. Parameter-parameter tersebut di definisikan sebagai berikut:

$$M = \frac{\sigma B_0^2 \bar{V}}{\rho_{nf} U_\infty} \quad (\text{Parameter Magnetik})$$

$$Pr = \frac{v_f}{\alpha_f} \quad (\text{Bilangan Prandtl})$$

#### 4.5 Fungsi Alir (Stream Function)

Fungsi alir atau fungsi arus adalah suatu fungsi yang digunakan untuk menghubungkan dua fungsi kecepatan yaitu komponen kecepatan  $u$  yang alirannya

berada pada arah  $x$  dan  $v$  berada pada arah  $y$ . Dengan adanya fungsi alir ( $\psi$ ) untuk fluida yang melewati permukaan bola dapat menyederhanakan banyak persamaan dan secara komputasi dapat dibuat dalam satu variabel. Fungsi alir dapat dinyatakan sebagai berikut (Mohammad dkk, 2013)

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.85)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan diatas pada model matematika yang telah disederhanakan maka diperoleh

a.) Persamaan kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \left( r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( r \cdot -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

b.) Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ M(u_e - u) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} & \\ &+ M \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

c.) Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.86)$$

Untuk  $0^\circ \leq x \leq \theta_s$  kondisi awal dan kondisi batas diberikan sebagai berikut;

$$\begin{aligned}
t < 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \theta = 0 \text{ untuk setiap } x, y \\
t \geq 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \theta = 1 \text{ pada saat } y = 0 \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_e(x), \theta = 0 \text{ pada saat } y \rightarrow \infty, \\
\text{Dimana } u_e &= \frac{3}{2} \sin \left( x \frac{\cos \alpha}{\cos x} \right), \text{ dan } b = \frac{\cos \alpha}{\cos x} a
\end{aligned}$$

#### 4.6 Persamaan Similaritas

Pada persamaan ini persamaan kontinuitas dapat dihilangkan dari hasil fungsi alir sehingga persamaan pembangun model matematikanya hanya terdapat 2 persamaan yaitu persamaan momentum dan persamaan energi. Seperti yang dituliskan pada (Mohammad dkk, 2013), yaitu setelah fluida mengalir maka akan terbentuk lapisan batas dengan ketebalan  $O(vt)^{\frac{1}{2}}$ . Dalam kajian ini memiliki solusi yang penting pada bagian waktu kecil ( $t \leq t^*$ ) dan waktu yang besar ( $t > t^*$ ) dimana  $t^*$  berupa nilai berapapun yang diinginkan, Maka variabel similaritas selanjutnya di definisikan sebagai berikut :(Mohammad dkk, 2013)

a.) Persamaan Variabel Similaritas untuk Waktu Kecil ( $t \leq t^*$ ) dengan  $t^*$  sebarang nilai

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \quad \theta = s(x, \eta, t) \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}} \quad (4.87)$$

b.) Persamaan Variabel Similaritas untuk Waktu Besar ( $t > t^*$ )

$$\psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t) \quad \theta = S(x, Y, t) \quad Y = y \quad (4.88)$$

##### 4.6.1 Persamaan Similaritas pada Saat Small Time

Dengan mensubstitusikan variabel-variabel similaritas *small time* pada fungsi alir maka diperoleh persamaan sebagai berikut.



a.) Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} + [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
 & + t \frac{du_e}{dx} \left( 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) Mt \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
 & = \\
 & t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e t \left[ \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \quad (4.89)
 \end{aligned}$$

b.) Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
 & \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1-\chi) + \chi\rho_{ND}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{\partial} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \\
 & Pr t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} u_e \frac{dr}{dx} + \frac{\partial s}{\partial \eta} - u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \quad (4.90)
 \end{aligned}$$

Pada saat aliran fluida melewati *Stagnation Point* ( $x = 0^\circ$ ) maka diperoleh  $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2 \cos \alpha}$  dan  $u_e = 0$ . Maka persamaan similaritas momentum dan energi menjadi

1.) Untuk *Small Time* ( $t \leq t^*$ )

a.) Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} + [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} \cos \alpha t \\
 & \left( 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \quad (4.91)
 \end{aligned}$$

b.) Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
 & \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1-\chi) + \chi\rho_{ND}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
 & + Pr \frac{\eta}{\partial} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t f \frac{3}{2 \cos \alpha} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.92)
 \end{aligned}$$

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 0, \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = u_e(x), s = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty$$

Dari persamaan (4.91) dan (4.92) dapat dituliskan sebagai berikut

a.) Persamaan Momentum

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} + [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f''' + \frac{3}{2 \cos x} t \left( 1 - (f')^2 - f f'' \right) + M t (1 - f') = t \frac{f''}{\partial t} \quad (4.93)$$

b.) Persamaan Energi

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1-\chi) + \chi\rho_{ND}]} s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' + \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t f s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.94)$$

Dimana tanda (') menunjukkan turunan partial terhadap  $\eta$  atau  $\frac{\partial f}{\partial \eta}$

Dengan Kondisi Batas

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 0, \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = u_e(x), s = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty$$

#### 4.6.2 Persamaan Similaritas pada Saat Large Time

Dengan mensubstitusikan variabel-variabel similaritas *large time* pada fungsi alir maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

a.) Persamaan Momentum

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} + [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{du_e}{dx} \left( 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) + M \left( 1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left[ \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \quad (4.95)$$

a.) Persamaan Energi

$$\begin{aligned} & \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + PrF \frac{du_e}{dx} \frac{\partial S}{\partial Y} \\ & = Pr \left( \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{r} u_e \frac{dr}{dx} + \frac{\partial S}{\partial Y} - u_e \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \quad (4.96) \end{aligned}$$

Pada saat aliran fluida melewati *Stagnation Point* ( $x = 0^\circ$ ) maka diperoleh  $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2 \cos \alpha}$  dan  $u_e = 0$ . Maka persamaan similaritas momentum dan energi menjadi

2.) Untuk *Large Time* ( $t > t^*$ )

- Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} + [(1 - \chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \cos \alpha t \\ & \left( 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 - F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} \quad (4.97) \end{aligned}$$

- Persamaan Energi

$$\begin{aligned} & \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + PrF \frac{3}{2 \cos \alpha} \frac{\partial S}{\partial Y} \\ & = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 & \text{ pada saat } Y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = u_e(x), S = 0 & \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.97) dan (4.98) dapat dituliskan sebagai berikut

- Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} + [(1 - \chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] F''' + \frac{3}{2 \cos x} t \\ & \left( 1 - (F')^2 - FF'' \right) + Mt(1 - F') = \frac{F''}{\partial t} \quad (4.99) \end{aligned}$$

- Persamaan Energi

$$\begin{aligned} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} S'' + \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr F S' \\ = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.100) \end{aligned}$$

Dengan Kondisi Batas

$$\begin{aligned} t < 0 : F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 0, \text{ untuk setiap } x, Y \\ t \geq 0 : F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ pada saat } \eta = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = u_e(x), S = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

#### 4.7 Penurunan Kondisi Awal

Kondisi awal untuk fungsi  $f; f'; f''$  dan  $s; s'$  didapatkan dengan menyubstitusikan  $t = 0$  pada Persamaan (4.93) dan (4.94) yang kemudian diselesaikan dengan menggunakan kondisi batas diperoleh

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{D}}} \left( 2 \left( \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{D}} \right) \eta \sqrt{\frac{1}{D}} + \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{\eta^2}{D}}}{\sqrt{\pi}} \right) \right) - 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}} \\ f' &= \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{D}}} \right) \\ f'' &= e^{-\frac{\eta^2}{4} + c_1} D \end{aligned}$$

Dimana  $D = (1 - \chi)^{2.5} \left[ (1 - \chi) + \left( \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]$

$$\begin{aligned} s' &= e^{-\frac{C_1 - \frac{Pr\eta^2}{4}}{G}} \\ s &= -\operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}} + 1 \end{aligned}$$

Dengan variabel-variabel G dan K sebagai berikut

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) \left[ (1 - \chi) + \frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right]} = G \quad (4.101)$$

Maka kondisi batasnya dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(0, t) = f'(0, t) = 0, s(0, t) = 1 \\ f' = 1, s = 0 \text{ untuk } \eta \longrightarrow \infty \end{aligned}$$



## **BAB 5**

### **PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA**

Pada bab ini menjelaskan tentang penyelesaian model matematika aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris secara numerik dengan menggunakan skema Keller-Box. Pada penyelesaian ini dimulai dengan mengimplementasikan metode Keller-Box dengan cara diskritisasi model yang telah didapatkan pada bab 4 yaitu similaritas dan kondisi awal, selanjutnya dapat dilakukan linierisasi Metode Newton, kemudian diselesaikan dengan teknik Eliminasi Matrik Blok Tridiagonal dan terakhir disimulasikan dengan program. Program simulasi yang telah dibuat menghasilkan hasil berupa grafik yang selanjutnya dianalisa.

#### **5.1 Penyelesaian Numerik Model**

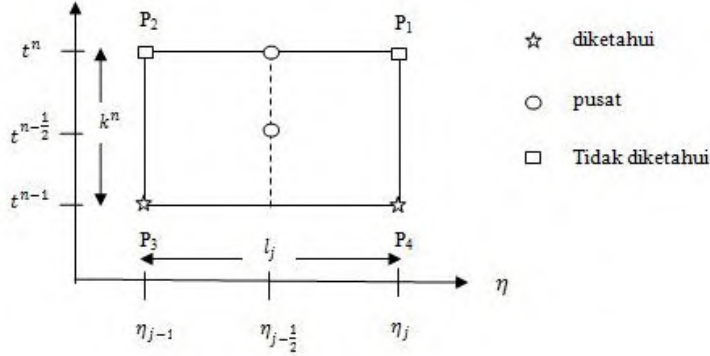
Setelah didapatkan model matematika dari aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris ini, selanjutnya dapat dilakukan penyelesaian secara numerik. Pada penelitian ini model persamaan yang didapatkan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Keller-Box. Sesuai dengan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, metode ini sesuai dan efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang berbentuk diferensial parsial parabolik. Tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik ini yaitu:

1. Persamaan model sistem (4.91) dan (4.92) dibentuk menjadi persamaan orde pertama
2. Dilakukan diskritisasi model dengan menggunakan beda hingga pusat
3. Dilakukan linierisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor
4. Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

##### **5.1.1 Diskritisasi Model**

Persamaan (4.93) dan (4.90) adalah persamaan-persamaan dengan orde tinggi. Untuk penyelesaian secara numerik yaitu dengan menggunakan metode Keller-Box

akan tetapi dalam penyelesaian metode ini menggunakan persamaan dalam bentuk orde pertama, maka dilakukan beberapa pemisalan fungsi sebagai berikut



Gambar 5.1: Stensil Beda Hingga

$$f' = u \quad (5.1)$$

$$u' = v \quad (5.2)$$

$$s' = q \quad (5.3)$$

$$\left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} + \left[ (1 - \chi) + \left( \chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] v' + \frac{\eta}{2} v + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t (1 - (u)^2 + f v) + Mt(1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} q' + Pr \frac{\eta}{2} q + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t f q = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.5)$$

Setelah dilakukan pemisalan fungsi selanjutnya dilakukan diskritisasi model dengan menggunakan metode beda hingga sesuai dengan Gambar 5.1, untuk Persamaan (5.1)-(5.3) menggunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$  pada ruas  $P_1 P_2$  dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada Persamaan (5.4) dan (5.5) digunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$  pada segiempat



$P_1 P_2 P_3 P_4$  sehingga didapatkan sebagai berikut

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.6)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.7)$$

$$\frac{(s_j^n - s_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n (1 - (u_{j-1/2}^n)^2 \\ & + f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n) + M t^n (1 - u_{j-1/2}^n) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n = -\frac{1}{D} \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\ & - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} (1 - (u_{j-1/2}^{n-1})^2 \\ & + f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1}) + M t^{n-1} (1 - u_{j-1/2}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & g \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + P r \frac{\eta_{j-1/2}}{2} q_{j-1/2}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} P r t^n f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n - 2 \frac{P r t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n \\ & = g \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + P r \frac{\eta_{j-1/2}}{2} q_{j-1/2}^{n-1} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} P r t^{n-1} f_{j-1/2}^{n-1} q_{j-1/2}^{n-1} \\ & - 2 \frac{P r t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

dengan  $l_j$  adalah step size untuk  $\eta$ , sedangkan  $k^n$  step size dari waktu, dimana

$$\begin{aligned} ()_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} [()_j^n + ()_{j-1}^n] \\ ()_j^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} [()_j^n + ()_j^{n-1}] \end{aligned}$$

### 5.1.2 Linierisasi Model

Setelah didapatkan hasil diskritisasi model, selanjutnya dilakukan linierisasi model pada Persamaan (5.6)-(5.10) dengan menggunakan metode Newton. Sebelumnya dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut

$$\begin{aligned}
f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\
v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\
s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi (5.11) pada sistem Persamaan (5.6)-(5.10), secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada  $(\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta s_j^{(i)}, \delta q_j^{(i)})$  didapatkan

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \tag{5.12}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \tag{5.13}$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
(a_1)_j \delta f_j + (a_2)_j \delta f_{j-1} + (a_3)_j \delta u_j + (a_4)_j \delta u_{j-1} + (a_5)_j \delta v_j + (a_6)_j \delta v_{j-1} \\
= (r_4)_j
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta s_j + (b_6)_j \delta s_{j-1} = (r_5)_j \tag{5.16}$$

dengan

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_4)_j &= -\frac{1}{D} \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^n - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left(1 - (u_{j-1/2}^n)^2\right. \\
&\quad \left.+ (f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n)\right) - Mt^n (1 - u_{j-1/2}^n) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n \\
&\quad - \frac{1}{D} \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^{n-1} \left(1 - (u_{j-1/2}^{n-1})^2\right. \\
&\quad \left.+ (f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1})\right) - Mt^{n-1/2} (1 - u_{j-1/2}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^{n-1} \\
(r_5)_j &= -g \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_i} - \frac{Pr}{2} \eta_{j-1/2} q_{j-1/2}^n - \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^n (f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n) \\
&\quad + 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n - g \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_i} - \frac{Pr}{2} \eta_{j-1/2} q_{j-1/2}^{n-1} \\
&\quad - \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^{n-1} (f_{j-1/2}^{n-1} q_{j-1/2}^{n-1}) - 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^{n-1}} s_{j-1/2}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_1)_j &= \frac{3}{2 \cos \theta_s} \frac{t^n}{2} (v_{j-1/2}^n) \\
(a_2)_j &= (a_1)_j \\
(a_3)_j &= -\frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n u_{j-1/2}^n - \frac{Mt^n}{2} - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
(a_4)_j &= (a_3)_j \\
(a_5)_j &= \frac{1}{D l_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \frac{t^n}{2} (f_{j-1/2}^n) \\
(a_6)_j &= -\frac{1}{D l_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \frac{t^n}{2} (f_{j-1/2}^n) \\
(b_1)_j &= g \frac{1}{l_j} + Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^n \left(\frac{f_{j-1/2}^n}{2}\right) \\
(b_2)_j &= -g \frac{1}{l_j} + Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^n \left(\frac{f_{j-1/2}^n}{2}\right) \\
(b_3)_j &= \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^n \frac{q_{j-1/2}^n}{2} \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= -Pr \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
(b_6)_j &= -(b_5)_j
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.90) maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta u_N = 0, \delta s_N = 0$ .

### 5.1.3 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada Persamaan (5.12)-(5.16) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok. Struktur tridiagonal blok biasanya terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta, sedangkan pada metode Keller-Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (5.12)-(5.16) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat  $j = 1$ ,  $j = N - 1$ , dan  $j = N$ .

**Keadaan 1** Saat  $j = 1$ , maka Persamaan (5.12)-(5.16) menjadi

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) = (r_1)_1$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_1}{2}(\delta v_1 + \delta v_0) = (r_2)_1$$

$$(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{l_1}{2}(\delta q_1 + \delta q_0) = (r_3)_1$$

$$\begin{aligned} (a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 + (a_5)_1 \delta v_1 + (a_6)_1 \delta v_0 \\ = (r_4)_1 \end{aligned}$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta s_1 + (b_6)_1 \delta s_0 = (r_5)_1$$

Berdasarkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0$ ,  $\delta u_0 = 0$ ,  $\delta s_0 = 0$  maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_6)_1 & 0 & (a_1)_1 & (a_5)_1 & 0 \\ 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta q_1 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk  $j = 1$   $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$ .

**Keadaan 2** Saat nilai  $j = N - 1$  maka Persamaan (5.12)-(5.16) menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta u_{N-1} + \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1}$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta v_{N-1} + \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1}$$

$$(\delta s_{N-1} - \delta s_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta q_{N-1} + \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1}$$

$$\begin{aligned} (a_1)_{N-1}\delta f_{N-1} &+ (a_2)_{N-1}\delta f_{N-2} + (a_3)_{N-1}\delta u_{N-1} + (a_4)_{N-1}\delta u_{N-2} \\ &+ (a_5)_{N-1}\delta v_{N-1} + (a_6)_{N-1}\delta v_{N-2} = (r_4)_{N-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_1)_{N-1}\delta q_{N-1} &+ (b_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} \\ &+ (b_5)_{N-1}\delta s_{N-1} + (b_6)_{N-1}\delta s_{N-2} = (r_5)_{N-1} \end{aligned}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_{N-1} & (a_6)_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & 0 & (b_2)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-3} \\ \delta q_{N-3} \\ \delta f_{N-2} \\ \delta v_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_4)_{N-1} & 0 & (a_1)_{N-1} & (a_5)_{N-1} & 0 \\ 0 & (b_6)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & 0 & (b_1)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta s_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Secara sederhana bentuk matriks diatas dapat dinyatakan sebagai

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

dimana bentuk ini berlaku untuk setiap  $j = 2, 3, \dots, N - 1$ .

**Keadaan 3** Saat nilai  $j = N$  maka Persamaan (5.12)-(5.16) menjadi

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta u_N + \delta u_{N-1}) = (r_1)_N$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta v_N + \delta v_{N-1}) = (r_2)_N$$

$$(\delta s_N - \delta s_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta q_N + \delta q_{N-1}) = (r_3)_N$$

$$\begin{aligned} (a_1)_N \delta f_N + (a_2)_N \delta f_{N-1} + (a_3)_N \delta u_N + (a_4)_N \delta u_{N-1} \\ + (a_5)_N \delta v_N + (a_6)_N \delta v_{N-1} = (r_4)_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} \\ + (b_5)_N \delta s_N + (b_6)_N \delta s_{N-1} = (r_5)_N \end{aligned}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_N & (a_6)_N & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_N & 0 & (b_2)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_4)_N & 0 & (a_1)_N & (a_5)_N & 0 \\ 0 & (b_6)_N & (b_3)_N & 0 & (b_1)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

secara sederhana dapat dinyatakan sebagai  $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$  untuk  $j = N$ .

Dengan demikian secara keseluruhan untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  secara sederhana dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
 j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\
 j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\
 j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\
 & \vdots \\
 j = N - 1 & : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\
 j = N & : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N]
 \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r} \quad (5.17)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & & [B_N] & [A_N] \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Persamaan (5.17), dapat dilihat bahwa matriks  $\mathbf{A}$  adalah matriks tridiagonal yang elemen-elemennya bernilai nol kecuali pada tiga diagonal utamanya. Persamaan (5.17) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok dengan mengasumsikan bahwa matriks  $\mathbf{A}$  adalah matriks *non singular* sehingga dapat difaktorkan sebagai

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (5.18)$$

dimana

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_1] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{pmatrix} \quad \text{dan}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_1] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & & [I] \end{pmatrix}$$

dengan  $[I]$  adalah matriks identitas yang berukuran  $5 \times 5$  dan  $[\alpha_j], [\Gamma_j]$  merupakan matriks ukuran  $5 \times 5$  dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [A_1][\Gamma_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (5.18) pada Persamaan (5.17) maka didapatkan persamaan

$$\mathbf{LU}\delta = \mathbf{r} \quad (5.19)$$

dengan mendefinisikan bahwa

$$\mathbf{U}\delta = \mathbf{W} \quad (5.20)$$

sehingga Persamaan (5.19) dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{LW} = \mathbf{r} \quad (5.21)$$



dimana

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

dan  $[W_j]$  adalah matriks berukuran  $5 \times 1$  dengan elemen-elemennya didapatkan dari Persamaan (5.21) yaitu

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks  $\mathbf{W}$ , maka selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari  $\delta$  pada Persamaan (5.20) dengan menggunakan persamaan berikut

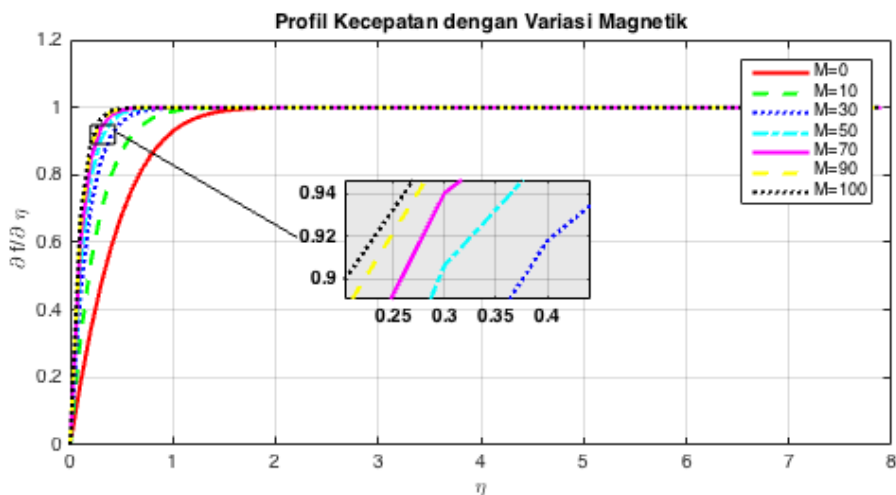
$$\begin{aligned} [\delta_j] &= [W_j] \\ [\delta_j] &= [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N - 1 \end{aligned}$$

dengan didapakkannya nilai  $\delta$ , maka Persamaan (5.12)-(5.16) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan (5.11) dengan melakukan iterasi sebanyak sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw kriteria konvergen menggunakan  $v(0, t)$  dan iterasi berhenti saat didapatkan  $|\delta v(0, t)| < \varepsilon$ , dimana nilai dari  $\varepsilon$  sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan nilai  $\varepsilon = 10^{-5}$  (Mohammad, 2014).

## 5.2 Hasil Simulasi Numerik

Tahap perhitungan secara numerik telah diselesaikan, maka tahap selanjutnya adalah tahapan simulasi numerik dengan menggunakan Matlab. Pada tahapan simulasi ini yang diinputkan beberapa parameter. Akan tetapi pada bab ini hanya ditampilkan beberapa untuk mewakili percobaan simulasi yang telah dilakukan. Simulasi ini menggunakan partisi eta ( $\eta$ ) sebanyak 60 dengan step size eta  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t$  sebanyak 33 dengan step size waktu  $\Delta t = k^n = 0.05$ . Maka berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, diperoleh hubungan antara parameter magnetik ( $M$ ), bilangan Prandtl ( $Pr$ ), *volume fraction nano fluid* ( $\chi$ ), sudut pengirisan ( $\theta_s$ ), dengan profil kecepatan ( $f'$ ) dan profil temperatur ( $s$ ).

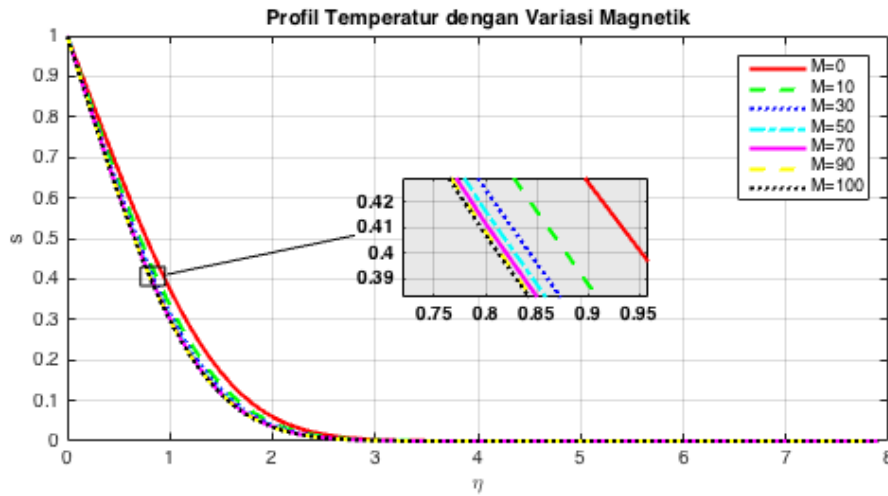
### 5.2.1 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik



Gambar 5.2: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik  
( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0$ )

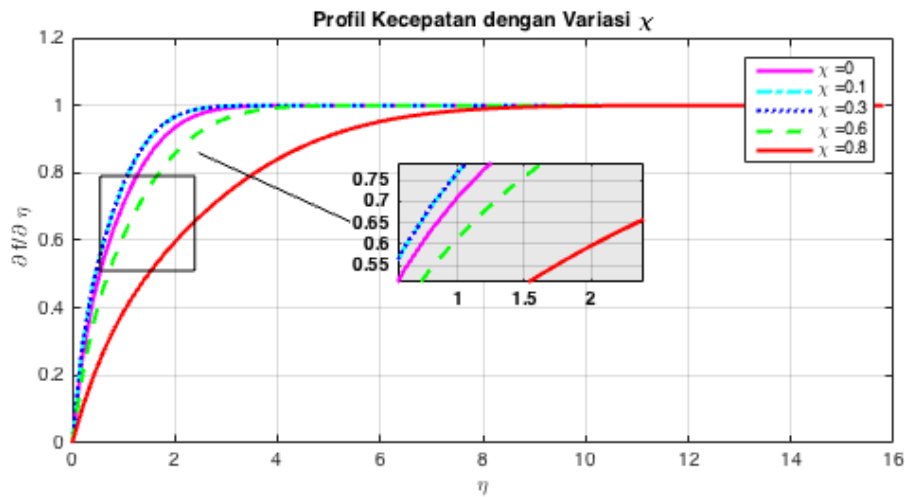
Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh kecepatan terhadap variasi parameter magnetik pada fluida nano. Variasi parameter magnetik yang dipakai dalam simulasi ini yaitu  $M = 0, 30, 50, 70, 90, 100$ . Pemilihan parameter magnetik  $M$  dapat diambil dari  $0 \leq M \leq 100$  dengan  $M = 0$  berarti tidak adanya pengaruh medan magnet pada aliran. Pada Gambar 5.2 dapat dilihat bahwa kecepatan fluida semakin meningkat seiring dengan bertambah besar nilai parameter magnetik. Profil kecepatan mengalami peningkatan mulai  $f' = 0$  sampai  $f' = 1$ . Berdasarkan hasil grafik pada Gambar 5.2 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka semakin meningkat pula profil kecepatan aliran fluida. Hal ini terjadi karena besar Gaya Lorentz yang bekerja semakin besar seiring dengan bertambahnya besar medan magnet yang mempengaruhi fluida nano.

Pada Gambar 5.3 yaitu profil temperatur mengalami penurunan mulai dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$ . Pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.3 didapatkan bahwa seiring bertambahnya parameter magnetik temperatur yang dihasilkan semakin menurun. Hal ini dikarenakan gaya Lorentz yang disebabkan oleh adanya medan magnet yang melintang pada aliran membuat fluida ini semakin bertambah energi internalnya. Energi internal digunakan untuk partikel fluida bergerak melaju sesuai dengan stream line, sehingga temperatur fluida ini akan semakin berkurang seiring dengan bertambahnya medan magnet.



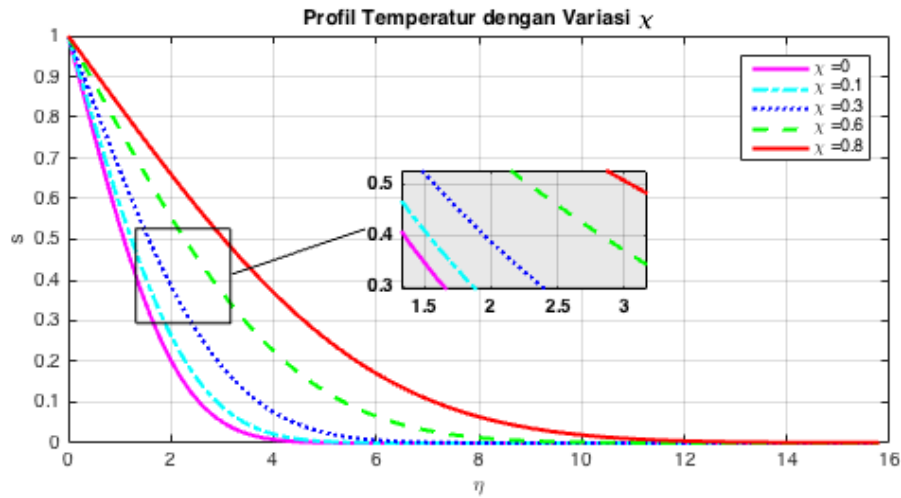
Gambar 5.3: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik  
( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0$ )

### 5.2.2 Pengaruh Nanopartikel Volume Fraction



Gambar 5.4: Profil Kecepatan dengan Variasi Nanopartikel Volume Fraction ( $\chi$ ) ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, M = 1$ )

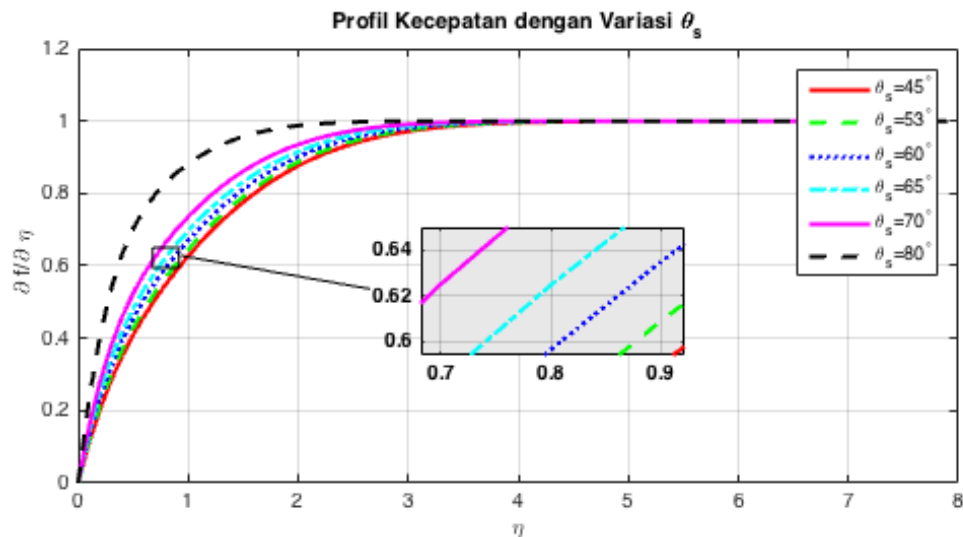
Pada simulasi ini dapat dilihat bahwa profil kecepatan variasi *nanoparticle volume fraction* ( $\chi$ ) semakin meningkat pada saat nilai  $\chi$  adalah  $0 \leq \chi \leq 0.5$  dan semakin berkurang pada saat nilai  $\chi$  adalah  $0.6 \leq \chi \leq 0.9$ . Pengaruh viskositas fluida nano dan densitas fluida nano sangat berpengaruh ketika nilai  $\chi$  di variasikan. Sehingga terdapat perbedaan terhadap grafik profil kecepatannya. Variasi  $\chi$  yang digunakan yaitu  $\chi = 0, 0.1, 0.3, 0.6$ , dan  $0.8$ . Semakin besar nilai  $\chi$  maka panas yang ditimbulkan pada fluida nano akan semakin besar disebabkan tumbukan antar partikel nano yang memiliki skala 1-100 nm.



Gambar 5.5: Profil Temperatur dengan Variasi Nanopartikel Volume Fraction ( $\chi$ ) ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $M = 1$ )

Pada Gambar 5.5 terlihat variasi *nanopartikel volume fraction*  $\chi$  didapatkan bahwa semakin besar nilai  $\chi$  maka semakin meningkatkan profil temperatur fluida nano. Hal ini disebabkan karena dengan bertambahnya nilai *nanopartikel volume fraction*  $\chi$  maka fluida nano akan semakin pekat, sehingga di dalam fluida terjadi gesekan antar partikel yang dapat menimbulkan panas.

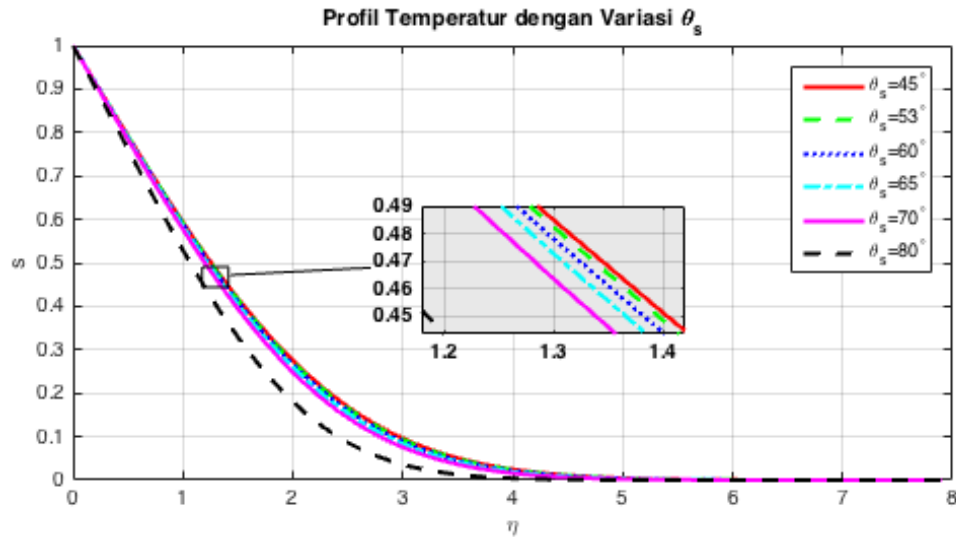
### 5.2.3 Pengaruh Variasi Sudut Irisan



Gambar 5.6: Profil Kecepatan dengan Variasi Sudut Irisan ( $\theta_s$ ) ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.1$ ,  $M = 1$ )

Pada Gambar 5.6 dapat terlihat bahwa semakin besar sudut irisannya maka semakin besar pula kecepatan fluida nano. Karena luasan datar permukaan benda

semakin lebar sehingga halangan aliran kecepatan yang diakibatkan lengkungan bola lebih kecil. Variasi yang digunakan dalam variasi sudut irisan ini sebesar  $45^\circ, 53^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ .



Gambar 5.7: Profil Temperatur dengan Variasi Sudut Irisan ( $\theta_s$ )  
( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0.1, M = 1$ )

Simulasi ini menggunakan partisi  $\eta$  sebanyak 80 dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t$  sebanyak 33 dengan  $\Delta t = k^n = 0.005$  sehingga nilai  $t = 0.165$ . Nilai variasi  $\theta_s = 45^\circ, 53^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70^\circ$ , dan  $80^\circ$ . Dapat terlihat bahwa semakin besar sudut irisan pada bola maka semakin menurun temperatur fluidanya. Hal ini karena semakin besar luasan permukaan datar bola maka gesakan fluida dengan permukaan akan semakin kecil.

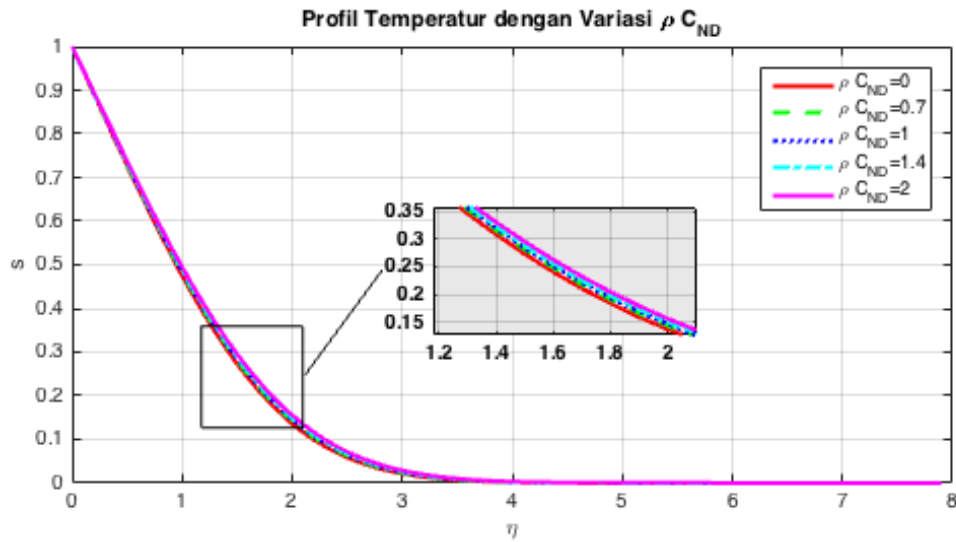
#### 5.2.4 Pengaruh Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano

Tabel 5.1: Profil Kecepatan dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano ( $\rho C_{ND}$ ) ( $Pr = 0.7, \theta_s = 53^\circ, \chi = 0.2, M = 1$ , dan  $\rho_{ND} = 4$ )

Rho_C{ ND}	Eta							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0,00	0	0,935304	0,999105	0,999998	1	1	1	1
0,70	0	0,935304	0,999105	0,999998	1	1	1	1
1,00	0	0,935304	0,999105	0,999998	1	1	1	1
1,40	0	0,935304	0,999105	0,999998	1	1	1	1
2,00	0	0,935304	0,999105	0,999998	1	1	1	1

Di dalam simulasi Tabel 5.1 ini dapat terlihat bahwa tidak ada pengaruh kapasitas panas ( $\rho C_{ND}$ ) terhadap profil kecepatan. Berapapun besar nilai ( $\rho C_{ND}$ )

yang diinputkan maka profil kecepatannya akan konstan. Hal ini disebabkan karena di dalam momentum tidak terdapat perpindahan panas atau konveksi yang terjadi sehingga kapasitas panasnya kecil. Pengaruh variasi kapasitas panas terlihat bervariasi di dalam temperatur fluida. Dalam simulasi ini nilai variasi kapasitas panas yang diinputkan adalah sebesar 0, 0.7, 1, 1.4, dan 2. Nilai  $\rho C_{ND} = 0$  diasumsikan adalah pada saat  $\rho C_{ND}$  bernilai konstan.

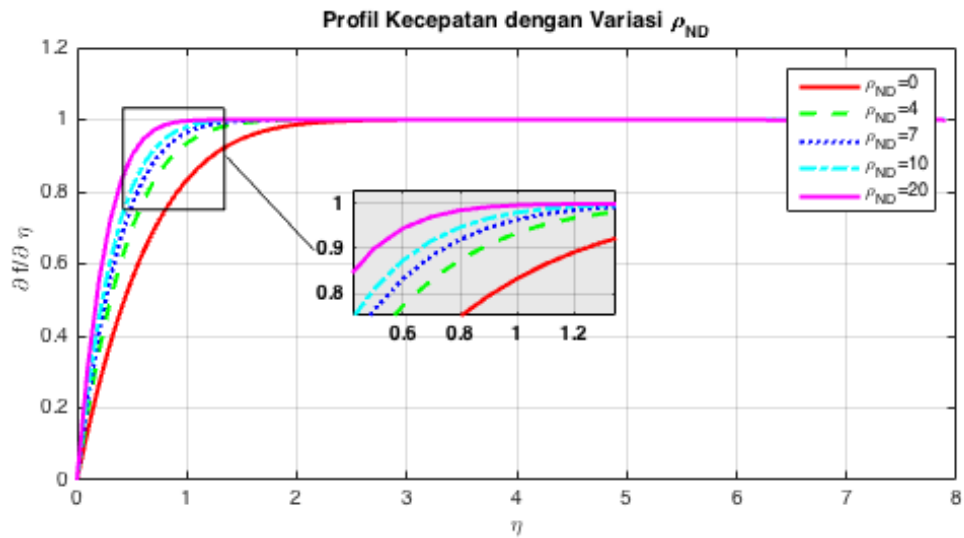


Gambar 5.8: Profil Temperatur dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano ( $\rho C_{ND}$ )

Pada Gambar 5.8 terlihat profil temperatur terhadap variasi kapasitas panas  $\rho C_{ND}$  semakin kecil dengan semakin besarnya variasi  $\rho C_{ND}$  yaitu 0, 0.7, 1, 1.4, 2 dengan ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.2$ ,  $M = 1$ , dan  $\rho_{ND} = 4$ ). Di dalam fluida nano terdapat energi yg dihasilkan dan dipengaruhi besar kecilnya dari kapasitas panas yang terjadi. Kapasitas panas itu sendiri adalah tenaga yang harus ditambahkan untuk menaikkan temperatur benda sebanyak  $1^\circ\text{C}$ .

#### 5.2.5 Pengaruh Variasi Densitas Fluida Nano

Simulasi mengenai pengaruh dari variasi densitas/kerapatan massa fluida nano terhadap profil kecepatan dapat dilihat pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.9, grafik tersebut dilakukan dengan perhitungan pada simulasi dengan menggunakan parameter-parameter yang tetap/konstan, yaitu: ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.2$ ,  $M = 1$ , dan  $\rho C_{ND} = 0.7$ ). Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai densitas fluida nano ( $\rho_{ND}$ ), maka akan menyebabkan profil kecepatan yang melewati bola teriris menjadi semakin meningkat. Massa jenis fluida nano itu sendiri adalah rasio densitas partikel dengan densitas fluida



Gambar 5.9: Profil Kecepatan dengan Variasi Densitas Fluida Nano ( $\rho_{ND}$ )

dasar. Maka mengakibatkan semakin meningkatnya densitas fluida nano maka profil kecepatan semakin meningkat. Sehingga dalam simulasi ini dapat disimpulkan jika densitas fluida nano semakin besar maka profil kecepatan semakin meningkat dan sebaliknya jika densitas fluida nano semakin kecil maka profil kecepatan semakin menurun.

Tabel 5.2: Profil Temperatur dengan Variasi Densitas Fluida Nano ( $\rho_{ND}$ )

Pr	$\eta = 1$	$\eta = 2$	$\eta = 3$	$\eta = 4$
0.7	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749
7	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749
70	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749
100	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749

Pada Tabel 5.2 simulasi ini pengaruh dari variasi kerapatan massa fluida nano terhadap profil temperatur dapat dilihat pada grafik yang ditunjukkan oleh Tabel 5.2, grafik tersebut dilakukan dengan perhitungan pada simulasi dengan menggunakan parameter-parameter yang tetap/konstan, yaitu: ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.2$ ,  $M = 1$ , dan  $\rho C_{ND} = 0.7$ ). Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai densitas fluida nano ( $\rho_{ND}$ ), maka akan menyebabkan profil temperatur yang melewati bola teriris menjadi semakin menurun. Sehingga

dalam simulasi ini dapat disimpulkan jika densitas fluida nano semakin besar maka profil temperatur semakin menurun dan sebaliknya jika densitas fluida nano semakin kecil maka profil temperatur semakin meningkat.

### 5.2.6 Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl

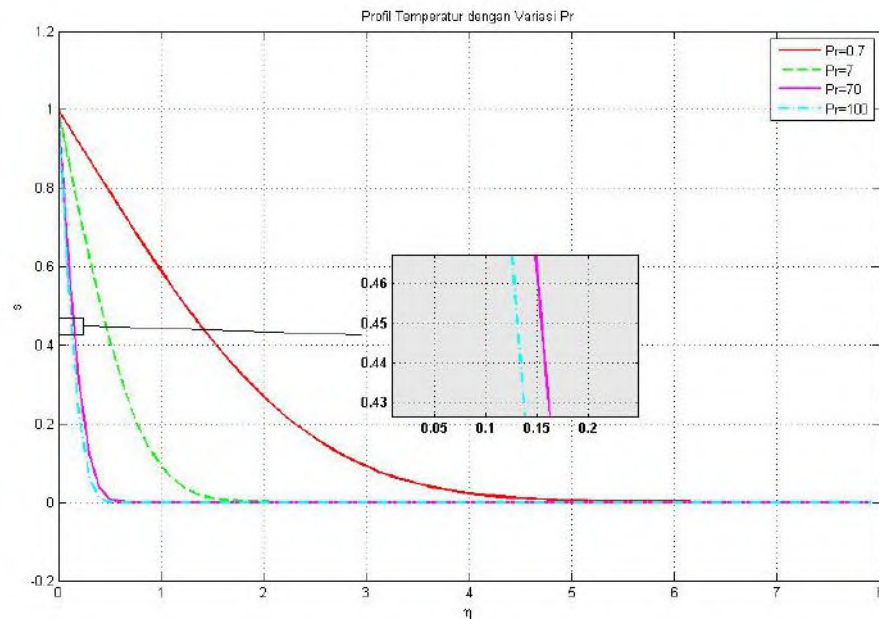
Tabel 5.3: Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) ( $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.1$ ,  $M = 1$ )

Pr	$\eta = 1$	$\eta = 2$	$\eta = 3$	$\eta = 4$
0.7	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749
7	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749
70	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749
100	0.70850327	0.934584341	0.991793854	0.999468749

Pada tabel diatas dapat terlihat bahwa tidak terdapat pengaruh  $\eta$  secara signifikan terhadap berapapun nilai variasi  $Pr$  yang diberikan. Akan tetapi terlihat bahwa semakin besar nilai  $\eta$  maka semakin meningkat profil kecepatan. Hal ini berpengaruh jika terdapat konveksi yang terjadi. Di dalam penelitian ini bilangan Prandtl akan berpengaruh pada profil temperatur karena adanya energi yang ada di dalam fluida nano. Berapapun besar inputan bilangan Prandtl maka tidak akan terdapat pengaruh di dalam profil kecepatan karena dalam penelitian ini tidak ada *heat transfer* atau konveksi yang terjadi. Bilangan Prandtl itu sendiri adalah perbandingan nilai dari viskositas kinematik dan difusivitas panas ( $Pr = \frac{v_f}{\alpha_f}$ ), dengan semakin meningkatnya nilai dari bilangan Prandtl akan berpengaruh pada besar viskositas kinematik dan difusivitas panas dari fluida. Pada saat viskositas kinematik meningkat, kecepatan fluida akan menurun karena kepekatan fluida tersebut.

Pada simulasi ini menggunakan beberapa variasi nilai bilangan Prandtl, yaitu 0.7, 7, 70, 100; dan 100, dengan nilai  $M = 1$  dengan  $t = 0,165$ , untuk bilangan Prandtl dapat dipilih nilainya yaitu  $0.7 \leq Pr \leq 100$  yang mana  $Pr = 0.7$  yang berarti gas,  $Pr = 7$  berarti air, dan  $7.2 - 13.4$  air laut. Pada Gambar 5.10 didapatkan bahwa semakin besar bilangan Prandtl yang digunakan maka semakin menurun temperatur fluida yang dihasilkan. Bilangan Prandtl merupakan rasio dari diffusivitas momentum dengan diffusivitas termal, dengan meningkatnya bilangan Prandtl maka konduktivitas termal akan turun dan pada permukaan bola teriris akan





Gambar 5.10: Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl ( $Pr$ ), ( $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.1$ ,  $M = 1$ )

lebih cepat panas daripada fluidanya. Hal ini lah yang menyebabkan temperatur fluida semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl.

### 5.3 Physical Case

Di dalam fluida nano terdapat partikel-partikel nano dan fluida dasar yang membentuk sehingga dapat disebut sebagai fluida nano. Dalam kasus penelitian ini partikel yang akan digunakan sebagai contoh adalah  $Cu$  dan  $Al_2O_3$  setiap partikel nano yaitu  $Cu$  dan  $Al_2O_3$  mempunyai nilai densitas, konduktifitas termal, dan kapasitas panas yang berbeda. Hal ini dapat ditunjukkan pada tabel berikut ini

Tabel 5.4: Bahan Thermophysical Fluida Nano

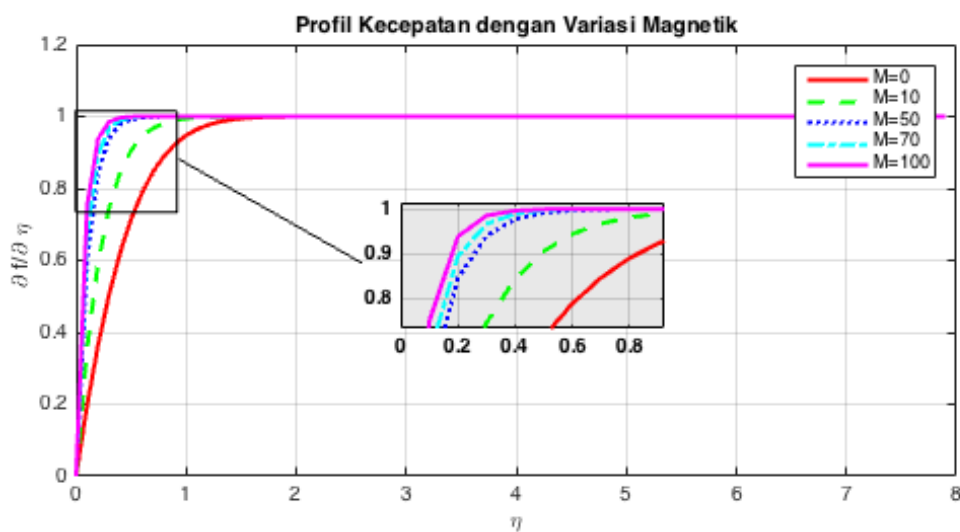
Koefisien dalam Fisika	Fluida Dasar (Air)	$Cu$	$Al_2O_3$
$C_p (J kg^{-1} K^{-1})$	4179	385	765
$\rho (kg m^{-3})$	997.1	8933	3970
$k (W mK^{-1})$	0.613	400	40

Data Tabel 5.4 diambil dari (Alkasasbeh, 2015). Tabel 5.4 digunakan untuk data inputan dalam pembuatan simulasi *physical case* sehingga dalam kasus ini diambil dari penelitian secara fisika, kimia maupun matematika yang telah diuji di

laboratorium. Yang menarik disini adalah perbedaan yang terkandung dalam setiap patikel/solid dan *Based-Fluid (Water)*. Dari buku (Alkasasbeh, 2015) *Nanopartikel Volume Fraction* ( $\chi$ ) memiliki range antara  $0 \leq \chi \leq 0.2$ . Bilangan Prandtl ( $Pr$ ) yang digunakan adalah 0.7 ; 6.2; dan 6.8. Dengan keterangan 0.7 adalah air, 6.2 dan 6.8 adalah *water-based nano fluid*. Dari keterangan diatas maka hasil simulasi dari masing-masing pengaruh parameter tersebut sebagai berikut

### 5.3.1 Pengaruh Parameter Magnetik

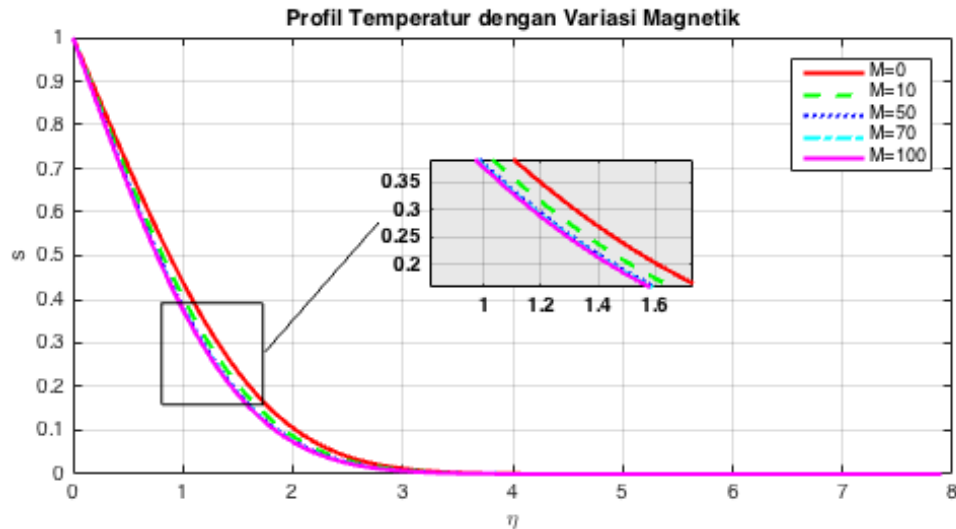
#### 1.) Pada Partikel Cu



Gambar 5.11: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik

Tahapan simulasi numerik ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh variasi parameter magnetik pada fluida nano. Variasi parameter magnetik yang digunakan pada simulasi ini adalah sebesar 0, 1, 5, 10 dengan  $\theta_s = 53$ ,  $\chi = 0.1$ ,  $Pr = 0.7$ . Pemilihan  $M$  dapat diambil dari  $0 \leq M \leq 100$  dengan  $M = 0$  berarti tidak adanya pengaruh medan magnet pada aliran. Pada Gambar 5.11 dapat dilihat bahwa kecepatan fluida semakin meningkat seiring dengan meningkatnya parameter magnetik. Nilai kecepatan mengalami peningkatan mulai  $f' = 0$  sampai  $f' = 1$ . Berdasarkan hasil grafik pada Gambar 5.11 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka semakin besar pula kecepatan aliran fluida. Hal ini terjadi karena besar Gaya Lorentz yang bekerja semakin besar seiring dengan bertambahnya besar medan magnet yang mempengaruhi fluida nano, hal ini dapat ditunjukkan secara matematis oleh  $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho_{nf} U_\infty}$ . Dengan meningkatnya gaya Lorentz mengakibatkan gerakan muatan-muatan listrik yang ada dalam medan

magnet menjadi meningkat dan bertambah pula momentum dari fluida ini, sehingga fluida kental pun akan bergerak lebih cepat.

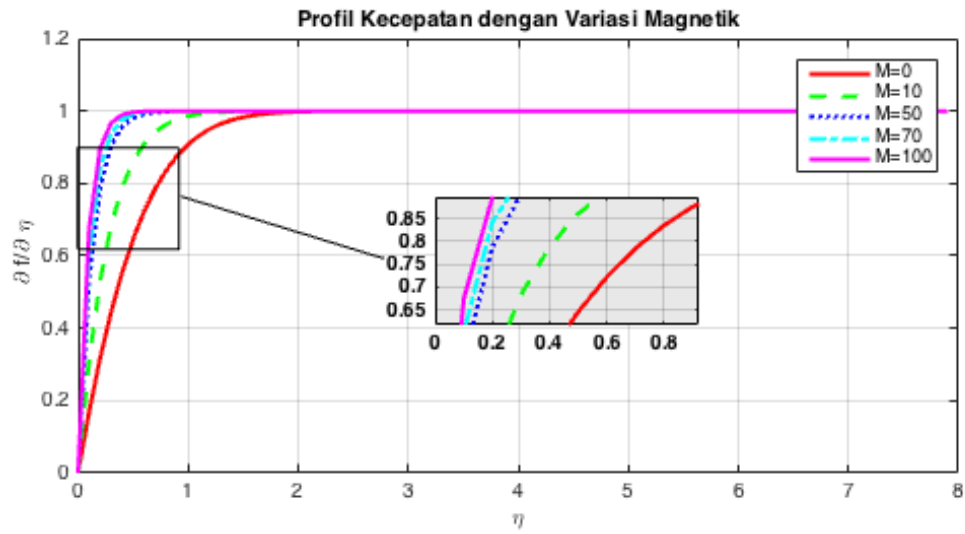


Gambar 5.12: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik

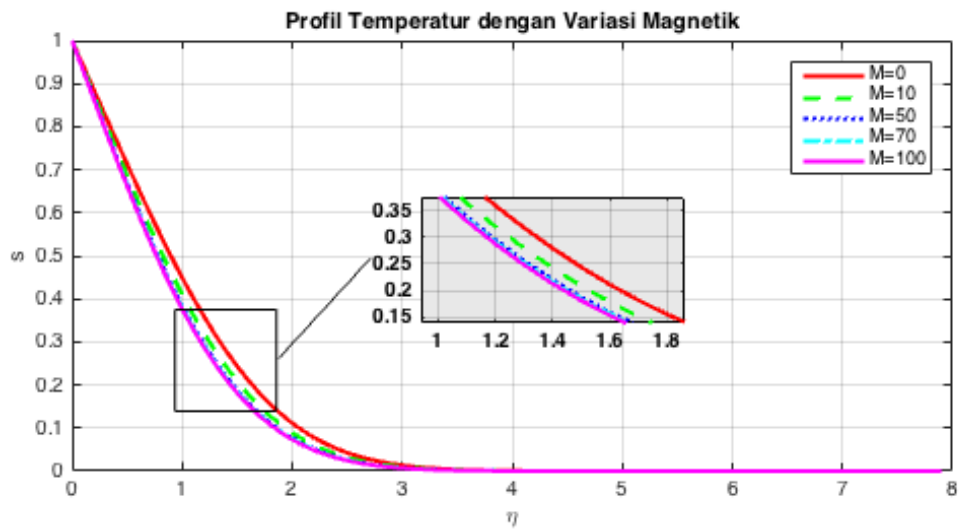
Pada Gambar 5.12 yaitu temperatur mengalami penurunan mulai dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$ . Pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.12 didapatkan bahwa seiring bertambahnya parameter magnetik temperatur yang dihasilkan semakin menurun. Hal ini dikarenakan gaya Lorentz yang disebabkan oleh adanya medan magnet yang melintang pada aliran membuat fluida ini semakin bertambah energi internalnya. Energi internal digunakan untuk partikel fluida bergerak melaju sesuai dengan stream line, sehingga temperatur fluida ini akan semakin berkurang seiring dengan bertambahnya medan magnet.

## 2.) Pada Partikel $Al_2O_3$

Pada Gambar 5.13 terlihat bahwa profil kecepatan semakin meningkat dengan bertambahnya variasi parameter magnetiknya. Variasi parameter magnetik yang digunakan adalah 0, 10, 50, 70, 100. Pada simulasi ini digunakan inputan beberapa parameter yang konstan, yaitu  $\theta_s = 53$ ,  $\chi = 0.1$ ,  $Pr = 0.7$ . Penjelasan sama dengan variasi parameter magnetik pada partikel  $Cu$ , akan tetapi berbeda besar kecil nilai  $f'$ .



Gambar 5.13: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik



Gambar 5.14: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik

Pada Gambar 5.14 terlihat bahwa profil temperatur semakin menurun dengan bertambahnya variasi parameter magnetiknya. Variasi parameter magnetik yang digunakan adalah sebesar 0, 10, 50, 70, 100. Pada simulasi ini digunakan inputan beberapa parameter yang konstan, yaitu  $\theta_s = 53$ ,  $\chi = 0.1$ ,  $Pr = 0.7$ . Penjelasan sama dengan variasi parameter magnetik pada partikel  $Cu$ , akan tetapi perbedaannya terdapat pada besar kecil nilai  $s$ .

# Lampiran 1

## 6.1 Penurunan Persamaan Komponen Tegangan Normal dan Tegangan Geser pada Penyelesaian Persamaan Momentum Sumbu x dan y

- Turunan  $\tau_{xx}$  terhadap  $x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{6.1}$$

- Turunan  $\tau_{yy}$  terhadap  $y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -p + 2\mu_{nf} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu_{nf} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}\tag{6.2}$$

- Turunan  $\tau_{xy}$  terhadap  $x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{nf} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\tag{6.3}$$

- Turunan  $\tau_{yx}$  terhadap  $y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{nf} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\tag{6.4}$$

komponen gaya permukaan yaitu

$$\left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \hat{j}$$

Sehingga dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \hat{i} \\ & + \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu_{nf} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \hat{j} \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan Kontinuitas yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Hal ini menunjukkan bahwa gaya permukaan dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \hat{i} \\ & + \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_{nf} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu_{nf} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \hat{j} \\ & = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{nf} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu_{nf} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \hat{j} \\ & = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \right) + \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \hat{j} \\ & = -\nabla p + \mu_{nf} \nabla^2 \bar{V} \end{aligned} \tag{6.5}$$

## Lampiran 2

### 6.2 Model Matematika Dimensional

Aliran Fluida melewati permukaan datar

- Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (6.6)$$

- Persamaan momentum

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \nabla \bar{p} + v_{nf} \nabla^2 \bar{V} - \frac{\sigma B_0^2 \bar{u}}{\rho_{nf}} \quad (6.7)$$

- Persamaan Energi

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \alpha_{nf} \nabla^2 T \quad (6.8)$$

Dengan kondisi awal dan kondisi batas

$$\begin{aligned} \bar{t} < 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty, \text{ untuk setiap } x, y \\ \bar{t} \geq 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_f, \text{ pada saat } y = b - a \\ \bar{u} = \bar{u}_e(x), \bar{T} = T_\infty, \text{ pada saat } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dimana  $\bar{u}_e = \frac{3}{2} u_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{b}\right)$

- Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (6.10)$$

- Persamaan momentum dalam arah sumbu - x

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 \bar{u}}{\rho_{nf}} \quad (6.11)$$

- Persamaan momentum dalam arah sumbu - y

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 \bar{v}}{\rho_{nf}}$$

- Persamaan Energi

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$



## Lampiran 3

### 6.3 Model Matematika Non-Dimensional

#### Transformasi Variabel Non-Dimensional

Untuk mengubah persamaan dimensional menjadi persamaan nondimensional, maka diberikan variabel-variabel non-dimensional dan juga digunakan untuk mempermudah dalam proses secara komputasi.

$$\begin{aligned}x &= \frac{\bar{x}}{a} \\y &= R_e^{1/2} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right) \\R_e &= \frac{u_\infty a}{v_{nf}} \\u &= \frac{\bar{u}}{U_\infty} \\v &= R_e^{1/2} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right) \\v_{nf} &= \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \\u_e(x) &= \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{v_\infty} \\r(x) &= \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a} \\p &= \frac{\bar{p}}{\rho_{nf} U_\infty^2} \\\alpha_{nf} &= \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \\\rho_{nf} &= (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}\mu_{nf} &= \frac{\mu_f}{(1 - \chi)^{2.5}} \\(\rho C_p)_{nf} &= (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s \\\frac{k_{nf}}{k_f} &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)}\end{aligned}$$

## Substitusi dari Persamaan Pembangun

- Persamaan kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial(aU_{\infty}ru)}{\partial(ax)} + \frac{\partial(aU_{\infty}Re^{1/2}rv)}{\partial(ayRe^{-1/2})} &= 0 \\ U_{\infty} \left( \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan kontinuitas tak berdimensi yaitu :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (6.13)$$

- Persamaan Momentum

a.) Persamaan Momentum Sumbu x

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 \bar{u}$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\&= \frac{\partial(U_{\infty}u)}{\partial(taU_{\infty}^{-1})} + uU_{\infty} \frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial(xa)} + vU_{\infty}Re^{-1/2} \frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial(yaRe^{-1/2})} \\&= \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_{\infty}^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_{\infty}^2}{a} v \frac{\partial u}{\partial y} \\&= \frac{U_{\infty}^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.14)\end{aligned}$$

### Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \\
& = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial (p \rho_{nf} U_\infty^2)}{\partial (xa)} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (xa)^2} + \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (ya Re^{-1/2})^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \\
& = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\rho_{nf} U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + v_{nf} \left( \frac{U_\infty}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \\
& = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \\
& = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial (p \rho_{nf} U_\infty^2)}{\partial (xa)} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (xa)^2} + \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (ya Re^{-1/2})^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \\
& = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\rho_{nf} U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + v_{nf} \left( \frac{U_\infty}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \\
& = -\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + v_{nf} \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \\
& = -\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + v_{nf} \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) & = -\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + v_{nf} \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
& \quad - \frac{\sigma a}{\rho_{nf}} B_0^2 u U_\infty \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan  $\left( \frac{U_\infty^2}{a} \right)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{a U_\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma a}{\rho_{nf} U_\infty} B_0^2 u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{a U_\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{a U_\infty} Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\sigma a B_0^2}{\rho_{nf} U_\infty} \right) u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{Re v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{Re v_f} Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{Re v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu$$

b.) Persamaan Momentum Sumbu y

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 \bar{v}$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\ &= \frac{\partial(U_\infty Re^{-1/2} v)}{\partial(a U_\infty^{-1} t)} + u U_\infty \frac{\partial(U_\infty Re^{-1/2} v)}{\partial(ax)} + U_\infty Re^{-1/2} v \frac{\partial(U_\infty Re^{-1/2} v)}{\partial(a Re^{-1/2} y)} \\ &= Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial v}{\partial t} + Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial v}{\partial x} + Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B_0^2 \bar{v} \\ &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial(\rho_{nf} U_\infty^2 p)}{\partial(ay Re^{-1/2})} + v_{nf} \left( \frac{\partial^2(U_\infty Re^{-1/2} v)}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(U_\infty Re^{-1/2} v)}{\partial(ay Re^{-1/2})^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_{nf}} \sigma B_0^2 U_\infty Re^{-1/2} v \\ &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\rho_{nf} U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + v_{nf} \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_{nf}} \sigma B_0^2 U_\infty Re^{-1/2} v \\ &= -\frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + v_{nf} \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_{nf}} \sigma B_0^2 U_\infty Re^{-1/2} v \\ &= -\frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + v_{nf} \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - Re^{-1/2} \left( \frac{\sigma U_\infty B_0^2}{\rho_{nf}} \right) v \end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka didapatkan

$$\begin{aligned} &Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial v}{\partial t} + Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial v}{\partial x} + Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -\frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + v_{nf} \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - Re^{-1/2} \left( \frac{\sigma U_\infty B_0^2}{\rho_{nf}} \right) v \end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan  $\left(\frac{U_\infty^2}{aRe^{-1/2}}\right)$  diperoleh

$$\begin{aligned}
Re^{-1} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{nf} Re^{-1}}{aU_\infty} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - \left( \frac{\sigma a Re^{-1} B_0^2}{\rho_{nf} U_\infty} \right) v \\
\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} Re^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&\quad - Re^{-1} \left( \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho_{nf} U_\infty} \right) v \\
\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{Re} \left( \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \right) v \\
\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} Mv
\end{aligned}$$

Jadi Persamaan Momentum Sumbu Y menjadi

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{aU_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} Mv \quad (6.13)$$

- Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
T &= \theta \\
\theta &= \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (6.12)$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial(taU_\infty^{-1})} + uU_\infty \left( \frac{\partial(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial(xa)} \right) \\
&\quad + vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial(yaRe^{-\frac{1}{2}})} \right) \\
&= \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty}{a} u \frac{\partial(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial x} + \frac{U_\infty}{a} v \frac{\partial(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{U_\infty}{a} v \frac{\partial(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial t} \\
& = \frac{U_\infty}{a} (T_f - T_\infty) \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) + \frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial T_\infty}{\partial t} + u \frac{\partial T_\infty}{\partial x} + v \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Karena  $T_\infty$  adalah suatu konstanta maka  $(\frac{\partial T_\infty}{\partial t}, \frac{\partial T_\infty}{\partial x}, \frac{\partial T_\infty}{\partial y} = 0)$   
 Sehingga ruas kiri menjadi

$$(T_f - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) \quad (6.8)$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
\alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) & = \alpha_{nf} \left( \left( \frac{\partial^2(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\partial(xa)^2} \right) + \left( \frac{\partial^2(T_f - T_\infty)\theta + T_\infty}{\frac{1}{\partial(yaRe^{-\frac{1}{2}})^2}} \right) \right) \\
& = \alpha_{nf} \left( \frac{(T_f - T_\infty)}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{(T_f - T_\infty)}{a^2} Re \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial T_\infty}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial T_\infty}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Karena  $T_\infty$  adalah konstanta maka persamaan menjadi

$$\begin{aligned}
& = \alpha_{nf} \left( \frac{(T_f - T_\infty)}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{(T_f - T_\infty)}{a^2} Re \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
& = \alpha_{nf} \left( \frac{(T_f - T_\infty)}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right) \quad (6.6)
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka dapat dituliskan

$$(T_f - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) = \alpha_{nf} \left( \frac{(T_f - T_\infty)}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right)$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan  $\frac{a}{U_\infty(T_f - T_\infty)}$  sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} & = \alpha_{nf} \frac{1}{aU_\infty} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} & = \frac{\alpha_{nf}}{aU_\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{nf}}{aU_\infty} Re \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

Karena  $a U_\infty = Re v_f$  dan  $v_f = Pr \alpha_f$  maka persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha_{nf}}{Re V_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{nf}}{Re V_f} Re \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha_{nf}}{Re V_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{nf}}{V_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{Re \alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\end{aligned}$$

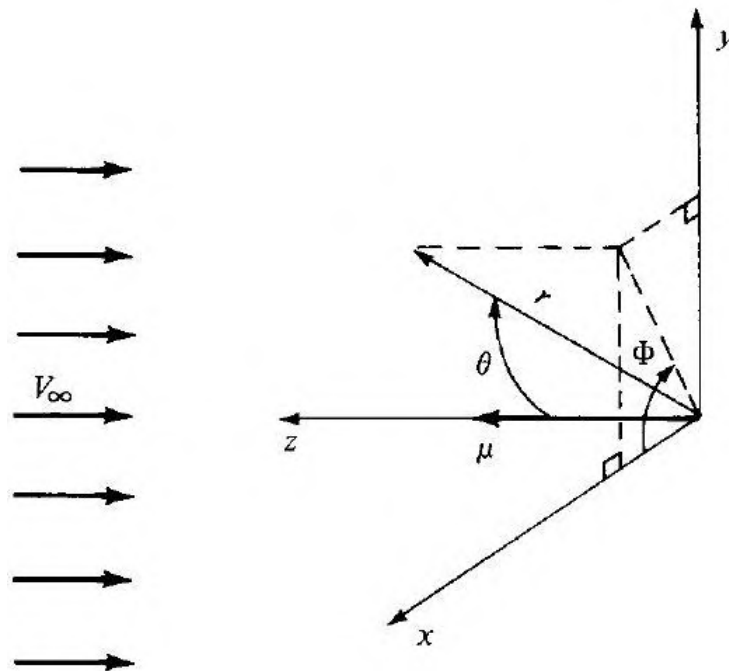
Pada (Anderson, John D: 2011) dijelaskan tentang koordinat pada aliran bebas yang melewati bola, yaitu

$$V_r = -V_\infty \cos \theta$$

$$V_\theta = V_\infty \sin \theta$$

$$V_\phi = 0$$

Dengan  $V_r, V_\theta, V_\phi$  adalah aliran bebas. Komponen-komponen tersebut dapat diterapkan pada gambar berikut ini



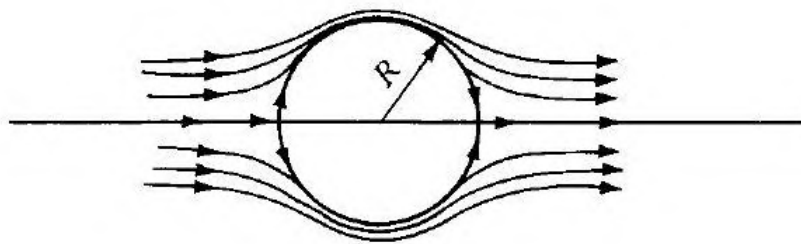
Gambar 6.1: Gabungan pada Aliran Tiga dimensi yang sama

$$\begin{aligned}
V = \Delta\phi &= \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} e_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} e_\theta + 0e_\phi \\
V_r &= -V_\infty \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} \\
&= -\left(V_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3}\right) \cos\theta \\
V_\theta &= V_\infty \sin\theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} \\
&= \left(V_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3}\right) \sin\theta \\
V_\phi &= 0
\end{aligned}$$

Aliran pada titik stagnasi  $V_r, V_\theta = 0$  dan  $\theta = 0$  sehingga  $\sin\theta = 0$ , maka persamaan-persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned}
V_r &= -\left(V_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3}\right) \cos\theta \\
0 &= V_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} \\
V_\infty &= \frac{\mu}{2\pi R^3} \\
R^3 &= \frac{\mu}{2\pi V_\infty} \\
R &= \left(\frac{\mu}{2\pi V_\infty}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Dimana  $r = R$  adalah koordinat radial pada titik stagnasi Pada permukaan



Gambar 6.2: Skema Aliran Incompressible pada Bola

bola dimana  $r=R$

$$V_\theta = \left(V_\infty - \frac{\mu}{4\pi r^3}\right) \sin\theta \tag{6.-14}$$



Dari persamaan sebelumnya, yaitu

$$R^3 = \frac{\mu}{2\pi R^3}$$

Maka  $\mu$  menjadi

$$\mu = 2\pi R^3 V_\infty$$

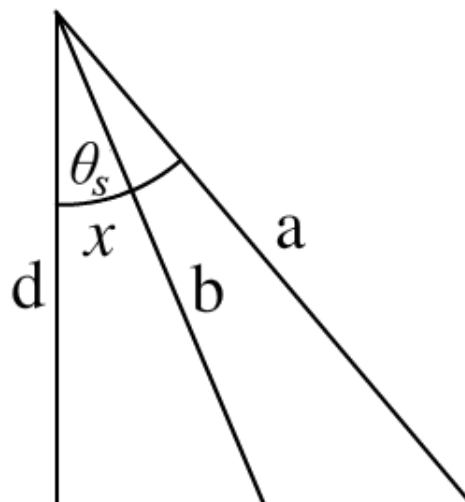
Substitusikan ke dalam persamaan sebelumnya, sehingga menjadi sebagai berikut

$$V_\theta = \left( V_\infty + \frac{2\pi R^3 V_\infty}{4\pi R^3} \right) \sin\theta$$

$$V_\theta = \left( V_\infty + \frac{1}{2} V_\infty \right) \sin\theta$$

$$V_\theta = \frac{3}{2} V_\infty \sin\theta$$

Dari persamaan di atas maka dapat dihitung nilai  $U_e$  pada penelitian ini. Maka ditunjukkan sebagai berikut



$$\cos \alpha = \frac{d_1}{a}$$

$$d_1 = a \cos \alpha$$

$$\cos x = \frac{d_2}{b}$$

$$d_2 = b \cos x$$

$$\text{maka } d_1 = d_2$$

$$a \cos \alpha = b \cos x$$

$$b = a \frac{\cos \alpha}{\cos x}$$

Dimana pada persamaan dimensional

$$\bar{u}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{\bar{x}}{b}$$

$$\bar{u}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{\bar{x}}{a \frac{\cos \alpha}{\cos x}}$$

$$\bar{u}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{\bar{x} \cos x}{a \cos \alpha}$$

Pada persamaan non-dimensional

$$u_e U_\infty = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{ax \cos x}{a \cos \alpha}$$

$$u_e = \frac{3}{2} \left( \sin x \frac{\cos x}{\cos \alpha} \right)$$

# Lampiran 4

## 6.4 Penyederhanaan Model Matematika Non-Dimensional

### 1.) Pendekatan Lapisan Batas

- Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

- Persamaan Momentum Sumbu x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{Re v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu$$

- Persamaan Momentum Sumbu y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

- Persamaan Energi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{Re \alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Pada pendekatan lapisan batas bilangan Reynold  $Re \rightarrow \infty$  sehingga berakibat  $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ . Maka persamaan kontinuitas, momemtum, dan energi dapat ditulis sebagai berikut

- Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

- Persamaan Momentum Sumbu x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu$$

- Persamaan Momentum Sumbu y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

- Persamaan Energi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Pada persamaan momentum sumbu  $y$  terlihat bahwa tekanan fluida  $p$  adalah variabel bebas terhadap  $y$  sehingga dapat disimpulkan bahwa tekanan aliran hanya bergantung pada variabel  $x$ , maka persamaan momentum yang digunakan sebagai pembangun model pada penelitian ini yaitu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu$$

Pada fluida yang melewati permukaan bola pada daerah di luar lapisan batas persamaan momentum di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - Mu_e$$

Karena kecepatan aliran bebas  $u_e = \frac{3}{2} \sin x$  maka diperoleh

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0$$

Substitusikan persamaan diatas maka didapatkan persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + Mu_e$$

Dengan mensubstitusikan persamaan momentum maka didapatkan persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + Mu_e - Mu \\ \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + M(u_e - u) \end{aligned}$$

**2.) Substitusi variabel-variabel Non-Dimensional Fluida Nano**      Penyelesaian  
 variabel-variabel yang digunakan dalam persamaan

$$\begin{aligned}
 v_{nf} &= \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \\
 v_f &= \frac{\mu_f}{\rho_f} \\
 \frac{v_{nf}}{v_f} &= \frac{\rho_{nf}}{v_f} \\
 &= \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} v_f} \\
 &= \frac{\mu_f}{(1-\chi)^{2.5}} \\
 &= \frac{1}{(1-\chi)\rho_f + \chi\rho_s(\frac{\mu_f}{\rho_f})} \\
 &= \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[1-\chi + \chi\frac{\rho_s}{\rho_f}]} \\
 \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} &= \frac{\frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}}{\frac{k_f}{(\rho C_p)_f}} \\
 &= \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \times \frac{(\rho C_p)_f}{k_f} \\
 &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)} \times \frac{(\rho C_p)_f}{k_f} \\
 &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho C_p)_f[(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)](1-\chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s} \\
 &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s))[(1-\chi) + \frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}]}
 \end{aligned}$$

• Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

- Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} [(1 - \chi + (\chi \frac{\rho_s}{\rho_f})]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u_e - u)$$

- Persamaan Energi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \frac{\chi(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Untuk kondisi awal dan kondisi batas  $0^\circ \leq x \leq \alpha$ , sebagai berikut

$$t < 0; u = v = 0, T = 0, \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t \geq 0; u = v = 0, T = 1, \text{ pada saat } y = b - a$$

$$u = u_e(x), T = 0, \text{ pada saat } y \rightarrow \infty$$

Dimana  $u_e = \frac{3}{2} \sin(x \frac{\cos x}{\cos \alpha})$  dan  $b = \frac{\cos \alpha}{\cos x} a$

## Lampiran 5

### 6.5 Fungsi Alir (*Stream Function*)

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.-16)$$

Dengan menerapkan persamaan di atas pada penyederhanaan model matematika maka diperoleh persamaan sebagai berikut

- Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \left( r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( r \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

- Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \\ u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u_e - u) \\ \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial t} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} &= \\ u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} + M \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \\ u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^3} + M \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

- Persamaan Energi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s))[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s))[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Untuk kondisi awal dan kondisi batas  $0^\circ \leq x \leq \alpha$  diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}t < 0; \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \theta = 0, \text{ untuk setiap } x, y \\ t \geq 0; \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \theta = 1, \text{ Pada saat } y = b - a \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_e(x), \theta = 0, \text{ Pada saat } y \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

dimana  $u_e(x) = \frac{3}{2} \sin(x \frac{\cos x}{\cos \alpha})$  dan  $b = \frac{\cos \alpha}{\cos x} a$



# Lampiran 6

## 6.6 Persamaan Similiaritas

1.) Untuk *Small Time* ( $t \leq t^*$ )

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t), \theta = s(x, \eta, t), \eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}$$

2.) Untuk *Large Time* ( $t > t^*$ )

$$\psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t), \theta = S(x, Y, t), Y = y$$

1.) Persamaan similaritas untuk waktu kecil

a.) Persamaan kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

b.) Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} [(1 - \chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ M(u_e - u) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &+ \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} [(1 - \chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &+ M(u_e - \frac{\partial \psi}{\partial y}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5} [(1 - \chi + (\chi \rho_{ND}))]} \right] \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ &+ M(u_e(x) - \frac{\partial \psi}{\partial y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{t^{1/2}} \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial(t^{1/2}u_e(x)r(x)f(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial t^{1/2}u_e(x)r(x)f(x, \eta, t)}{\partial x} \\
&= t^{1/2}f(x, \eta, t) \frac{du_e(x)}{dx} r(x) + t^{1/2}u_e \frac{dr}{dx} f(x, \eta, t) \\
&\quad + t^{1/2}u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x)r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t} u_e(x)r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{du_e(x)}{dx} r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{dr}{dx} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) \\
&\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
&= -\frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned}$$

untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa  $u_e(x) = u_e$  dan  $f(x, \eta, t) = f, r(x)$  ditulis  $r$ .

#### Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r} \left( -\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \frac{1}{r^2} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left( \frac{du_e}{dx} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{dr}{dx} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( t^{-1/2} \frac{du_e}{dx} r f + t^{-1/2} u_e \frac{dr}{dx} f + t^{-1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{u_e r}{t^{-1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{du_e}{dr} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
&\quad - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

### Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
& u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{1}{r} \left( \frac{u_e r}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M \left( u_e - \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M u_e \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan sehingga :

$$\begin{aligned}
& = - \frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{du_e}{dr} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
& \quad - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M u_e \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi  $\frac{u_e}{t}$  sehingga :

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{du_e}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e t}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t u_e \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
& \quad - \frac{u_e t}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{u_e t f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e t \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& = t \frac{du_e}{dx} + \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{du_e}{dx} \left( 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
& \quad M t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e t \\
& \quad \left[ \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right]
\end{aligned}$$

Karena di titik stagnasi  $x = 0^\circ$

Maka  $u_e = 0$  dan  $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2} \cos \alpha$

1.) Untuk *Small Time* ( $t \leq t^*$ )

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} \cos \alpha t$$

$$\left( 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta}$$

2.) Untuk *Large Time* ( $t \leq t^*$ )

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{Y}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \cos \alpha t$$

$$\left( 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 - F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) = t \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y}$$

c.) Persamaan Energi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{t^2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\frac{1}{t^2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\frac{1}{t^2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{\frac{1}{t^2}} \frac{1}{\frac{1}{t^2}} \\ &= \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan bahwa  $s(x, \eta, t) = s$  sehingga persamaan similaritas untuk energi yaitu :

### Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{1}{r} \frac{\eta}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} \\
&\left( \frac{1}{t^2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} r + t^2 u_e \frac{dr}{dx} f + t^2 u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \right) \\
&= -\frac{\eta}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\
&\quad - \frac{u_e f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} - u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

### Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Pr} \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho_{cp})_s}{(\rho_{cp})_f}} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{1}{t} \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho_{cp})_s}{(\rho_{cp})_f}} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned}
&-\frac{\eta}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} \\
&-f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{u_e f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} - u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{1}{t} \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho_{cp})_s}{(\rho_{cp})_f}} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan  $Pr t$  didapatkan :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -Pr \frac{\eta}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - Pr t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t \frac{u_e f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \\
&\quad \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho_{cp})_s}{(\rho_{cp})_f}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho_{cp})_s}{(\rho_{cp})_f}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \\
&\quad Pr t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} u_e \frac{dr}{dx} + \frac{\partial s}{\partial \eta} - u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Karena pada titik stagnasi yaitu  $x \approx 0$ , dengan demikian maka nilai  $u_e = 0$  dan

$$\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2 \cos \alpha}$$

1.) Untuk *Small Time* ( $t \leq t^*$ )

$$\begin{aligned} & \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho_{cp})_s}{(\rho_{cp})_f}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{\partial} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt f \frac{3}{2 \cos \alpha} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ = & Prt \frac{\partial s}{\partial t} \end{aligned}$$

2.) Untuk *Large Time* ( $t \leq t^*$ )

$$\begin{aligned} & \frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi \frac{(\rho_{cp})_s}{(\rho_{cp})_f}} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr \frac{Y}{\partial} \frac{\partial S}{\partial Y} + Prt f \frac{3}{2 \cos \alpha} \frac{\partial S}{\partial Y} \\ = & Prt \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$



## Lampiran 7

### 6.7 Penurunan Kondisi Awal

- Persamaan Momentum

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f''' + \frac{3}{2 \cos x} t (1 - (f')^2 - f f'') + M t (1 - f') = t \frac{f''}{\partial t}$$

Pada saat  $t = 0$ , maka didapatkan persamaan

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

Untuk mendapatkan  $f$  digunakan persamaan :

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

Terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk persamaan differensial tingkat satu, dengan memisalkan  $f'' = h$  sehingga persamaan tersebut menjadi :

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] h' + \frac{\eta}{2} h = 0$$

Jika  $h' = \frac{dh}{d\eta}$  maka persamaan tersebut dapat dituliskan

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] dh + \frac{\eta}{2} h d\eta = 0$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan  $h$  sehingga didapatkan

$$\left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{1}{h} dh + \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

Kedua ruas diintegrasikan maka didapatkan

$$\int \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{1}{h} dh + \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

$$[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]] \ln h + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$

$$[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]] \ln h = -\frac{\eta^2}{4} + c_1$$

$$\ln h = \frac{-\frac{\eta^2}{4} + c_1}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}$$

$$h = e^{\frac{-\frac{\eta^2}{4} + c_1}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}}$$

$$f'' = e^{\frac{-\frac{\eta^2}{4} + c_1}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}}$$

$$f'' = e^{\frac{c_1}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}} e^{\frac{-\frac{\eta^2}{4}}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}}$$

$$= e^{\frac{c_1}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}} \int e^{\frac{-\frac{\eta^2}{4}}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}}$$

$$= e^{\frac{c_1}{[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}} \int e^{\frac{-\eta^2}{4[(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]]}}$$

$$= e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}}{4 \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]}}$$

$$erf \left( \sqrt{\frac{1}{4(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \eta \right)$$

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \right) + C_2$$

Kondisi batas  $\eta = 0$  dan  $f = f' = 0$

$$0 = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \operatorname{erf}(0) + C_2$$

$$0 = 0 + C_2$$

Maka  $C_2 = 0$ , sehingga  $f'$  adalah

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \right)$$

Jika  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $f' = 1$  maka

$$1 = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \operatorname{erf} \left( \frac{\infty}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \right)$$

$$1 = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \operatorname{erf}(\infty)$$

$$1 = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \cdot 1$$

$$e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}$$

$$erf \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}} \right)$$

$$f' = erf \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}} \right)$$

Maka nilai  $f$  adalah

$$f = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}}}$$

$$\left( 2 \left( \frac{1}{2} erf \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}} \right) \right) \eta \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{e} \frac{\frac{\eta^2}{4(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}{\sqrt{\pi}} \right) + C_3$$

Jika  $\eta = 0$  maka  $f = 0$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}}}$$

$$\left( 2 \left( \frac{1}{2} erf \left( (0) + \frac{e^{-\frac{1}{4(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}}{\sqrt{\pi}} \right) \right) \right) + C_3$$

$$0 = \sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \left( 2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) + C_3$$

$$C_3 = \frac{-2\sqrt{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}{\sqrt{\pi}}$$

$$C_3 = -2\sqrt{\frac{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}{\pi}}$$

Maka substitusikan ke dalam nilai  $f$

$$f = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}}} \left( 2 \left( \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \right) \eta \sqrt{\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4} \frac{\eta^2}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}} \right) \right) - 2 \sqrt{\frac{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}{\pi}}$$

misalkan  $(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})] = D$ , maka

$$f = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{D}}} \left( 2 \left( \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{D}} \right) \eta \sqrt{\frac{1}{D}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4} \frac{\eta^2}{D}} \right) \right) - 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}}$$

$$f' = \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{D}} \right)$$

$$f'' = e^{-\frac{\eta^2}{4D} + c_1}$$

- Persamaan Energi

1.) Untuk *Small Time*

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1-\chi) + \chi\rho_{ND}]} s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' + \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t f s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 0, \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = u_e(x), s = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty$$

2.) Untuk Waktu Besar ( $t > t^*$ )

Persamaan pembangun pada titik stagnasi depan dan belakang disederhanakan sebagai berikut

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} S'' + \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr F S' = Pr \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} t < 0 : F &= \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 0, \text{ untuk setiap } x, Y \\ t \geq 0 : F &= \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ pada saat } \eta = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} &= u_e(x), S = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan  $t = 0$ , maka diperoleh

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' = 0$$

selanjutnya dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan  $s$  dengan memisalkan  $s' = m$  sehingga

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} m'' + Pr \frac{\eta}{2} m' = 0$$

dengan  $m' = \frac{dm}{d\eta}$  maka dapat dituliskan

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} dm + \frac{Pr\eta}{2} m d\eta = 0$$

Kedua ruas dibagi dengan  $m$  sehingga didapatkan

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} \frac{1}{m} dm + \frac{Pr\eta}{2} d\eta = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} dm + \frac{Pr\eta}{2} m d\eta = 0 \\ & \frac{dm}{m} + \frac{Pr\eta}{2} d\eta = 0 \\ & \ln m + \frac{Pr\eta^2}{4} = C_1 \end{aligned}$$

Kedua ruas diintegrasikan di dapatkan

$$\int \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} \ln m + \frac{Pr\eta^2}{4} d\eta = C_1$$

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} \ln m = -\frac{Pr\eta^2}{4} + C_1$$

$$\ln m = \frac{-\frac{Pr\eta^2}{4} + C_1}{\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]}}$$

$$m = e^{\frac{C_1 - \frac{Pr\eta^2}{4}}{\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]}}}$$

Maka  $s'$  sama dengan

$$s' = e^{\frac{C_1 - \frac{Pr\eta^2}{4}}{\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]}}}$$

$$s = \int e^{\frac{C_1 - \frac{Pr\eta^2}{4}}{\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]}} d\eta$$

$$s = e^{\frac{C_1}{\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]}}}$$

$$\int e^{\frac{-\frac{Pr\eta^2}{4}}{\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)[(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]}} d\eta$$

Dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi eror ( $erf$ ) di dalamnya yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\eta}{4c}} erf(\sqrt{x})$$

Penyederhanaan variabel-variabel untuk memudahkan dalam perhitungan  
Misalkan

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s) [(1 - \chi) + \chi\rho C_{ND}]} = G$$

Maka didapatkan persamaan sebagai berikut

$$s' = e^{\frac{C_1}{G} \sqrt{\frac{\pi}{4\frac{Pr}{4G}}} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{Pr}{4G}} \eta} + C_2$$

$$s' = e^{\frac{C_1}{G} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}}} + C_2$$

Pada saat  $\eta = 0$  maka  $S = 1$

$$1 = e^{\frac{C_1}{G} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf} \left( \frac{0}{2} \right) \sqrt{\frac{Pr}{G}}} + C_2$$

$$C_2 = 1 - e^{\frac{C_1}{G} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf}(0) \sqrt{\frac{Pr}{G}}}$$

$$C_2 = 1$$

Substitusikan ke dalam  $s'$  maka nilai  $s$  menjadi

$$s = e^{\frac{C_1}{G} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}}} + 1$$



Pada Saat  $\eta = \infty, s = 0$  maka

$$\begin{aligned}
 s &= e^{\frac{C_1}{G}} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}} + 1 \\
 0 &= e^{\frac{C_1}{G}} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf} \frac{\infty}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}} + 1 \\
 0 &= e^{\frac{C_1}{G}} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf}(\infty) + 1 \\
 0 &= e^{\frac{C_1}{G}} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} + 1 \\
 -1 &= e^{\frac{C_1}{G}} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \\
 e^{\frac{C_1}{G}} &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{G\pi}{Pr}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{G\pi}{Pr}}} \sqrt{\frac{G\pi}{Pr}} \operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}} + 1 \\
 s &= -\operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}} + 1
 \end{aligned}$$

Maka  $s'$  dan  $s$  adalah

$$\begin{aligned}
 s' &= e^{\frac{C_1 - \frac{Pr\eta^2}{4}}{G}} \\
 s &= -\operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}} + 1
 \end{aligned}$$

# Lampiran 8

## 6.8 Diskritisasi Model

Berdasarkan pemisalan fungsi dalam bentuk orde pertama yaitu :

- Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' + \frac{3}{2 \cos \alpha} t (1 - (f') - f f'') \\ & + Mt(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t} \\ = & \left[ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} [(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] v' + \frac{\eta}{2} v + \frac{3}{2 \cos \alpha} t (1 - (u)^2 + f v) \\ & + Mt(1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

- Persamaan Energi

$$\begin{aligned} & \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi\rho_{CND}} s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' + \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t f s' \\ = & Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \\ & \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + \chi\rho_{CND}} q' + Pr \frac{\eta}{2} q + \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t f q = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \end{aligned}$$

## 1. Diskritisasi Persamaan Momentum

Misalkan  $(1 - \chi)^{2.5} [(1 - \chi) + (\chi \rho_{ND})] = D$

$$\begin{aligned} (l_1)_{j-1/2}^n &= \left[ \frac{1}{D} v' + \frac{\eta}{2} v + \frac{3}{2 \cos \alpha} t (1 - u^2 + f v) + M t (1 - u) \right]_{j-1/2}^n \\ &= \left( \frac{1}{D} \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^n + \frac{3}{2 \cos \alpha} t^n (1 - (u_{j-1/2}^n)^2 \right. \\ &\quad \left. + f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n) + M t^n (1 - u_{j-1/2}^n) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l_1)_{j-1/2}^{n-1} &= \left[ \frac{1}{D} v' + \frac{\eta}{2} v + \frac{3}{2 \cos \alpha} t (1 - u^2 + f v) + M t (1 - u) \right]_{j-1/2}^{n-1} \\ &= \left( \frac{1}{D} \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^{n-1} + \frac{3}{2 \cos \alpha} t^{n-1} (1 - (u_{j-1/2}^{n-1})^2 \right. \\ &\quad \left. + f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1}) + M t^{n-1} (1 - u_{j-1/2}^{n-1}) \right) \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (2) dan persamaan (3) pada persamaan (1)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( \frac{1}{D} \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^n + \frac{3}{2 \cos \alpha} t^n (1 - (u_{j-1/2}^n)^2 \right. \\ &\quad \left. + f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n) + M t^n (1 - u_{j-1/2}^n) \right) + \left( \frac{1}{D} \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^{n-1} + \frac{3}{2 \cos \alpha} t^{n-1} (1 - (u_{j-1/2}^{n-1})^2 \right. \\ &\quad \left. + f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1}) + M t^{n-1} (1 - u_{j-1/2}^{n-1}) \right) = \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D} \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^n + \frac{3}{2 \cos \alpha} t^n (1 - (u_{j-1/2}^n)^2 \\ &\quad + f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n) + M t^n (1 - u_{j-1/2}^n) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n = -\frac{1}{D} \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\ &\quad - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \alpha} t^{n-1} (1 - (u_{j-1/2}^{n-1})^2 \\ &\quad + f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1}) + M t^{n-1} (1 - u_{j-1/2}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned}$$

## 2. Diskritisasi Persamaan Energi

$$\frac{1}{2} \left[ (l_2)_{j-1/2}^n + (l_2)_{j-1/2}^{n-1} \right] = Prt^{n-1/2} \left( \frac{s_{j-1/2}^n - s_{j-1/2}^{n-1}}{k^n} \right) \quad (4)$$

Misalkan :

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f + k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)(1 - \chi) + (\chi\rho C_{ND})} = g$$

$$\begin{aligned} (l_2)_{j-1/2}^n &= \left[ gq' + Pr\frac{\eta}{2}q + \frac{3}{2\cos\alpha}Prtfq \right]_{j-1/2}^n \\ &= g \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr\frac{\eta_{j-1/2}}{2}q_{j-1/2}^n + \frac{3}{2\cos\alpha}Prt^n f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (l_2)_{j-1/2}^{n-1} &= \left[ gq' + Pr\frac{\eta}{2}q + \frac{3}{2\cos\alpha}Prtfq \right]_{j-1/2}^{n-1} \\ &= g \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Pr\frac{\eta_{j-1/2}}{2}q_{j-1/2}^{n-1} + \frac{3}{2\cos\alpha}Prt^{n-1} f_{j-1/2}^{n-1} q_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Sehingga substitusi persamaan (5) dan (6) pada persamaan (4)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( g \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr\frac{\eta_{j-1/2}}{2}q_{j-1/2}^n + \frac{3}{2\cos\alpha}Prt^n f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n \right. \\ &\quad \left. + g \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Pr\frac{\eta_{j-1/2}}{2}q_{j-1/2}^{n-1} + \frac{3}{2\cos\alpha}Prt^{n-1} f_{j-1/2}^{n-1} q_{j-1/2}^{n-1} \right) \\ &= \frac{Prt^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n - \frac{Prt^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &g \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr\frac{\eta_{j-1/2}}{2}q_{j-1/2}^n + \frac{3}{2\cos\alpha}Prt^n f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n \\ &\quad - 2\frac{Prt^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n = g \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Pr\frac{\eta_{j-1/2}}{2}q_{j-1/2}^{n-1} \\ &\quad + \frac{3}{2\cos\alpha}Prt^{n-1} f_{j-1/2}^{n-1} q_{j-1/2}^{n-1} - 2\frac{Prt^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned}$$

Setelah dilakukan diskritisasi selanjutnya dilakukan linierisasi dengan metode Newton sebagai berikut :

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta f_j - \delta f_{j-1}) &= \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) \\ (\delta f_j - \delta f_{j-1}) + \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) &= -(f_j^n + f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) &= \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) \\ (\delta u_j - \delta u_{j-1}) + \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) &= -(u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j}(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) &= \frac{1}{2}(s_j^n + s_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta q_j + \delta q_{j-1}) \\ (\delta s_j - \delta s_{j-1}) + \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) &= -(s_j^n + s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(\delta q_j^n + \delta q_{j-1}^n)\end{aligned}$$

### 3. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}&\frac{1}{D} \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{1}{D} \left( \frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} \left( v_{j-1/2}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\ &+ \frac{3}{2 \cos \alpha} t^n \left( 1 - \left( u_{j-1/2}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + \left( f_{j-1/2}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \right. \\ &\left. \left( v_{j-1/2}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \right) + M t^n \left( 1 - \left( u_{j-1/2}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \right) \\ &- 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \left( u_{j-1/2}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = R_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{D} \left( \frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2\cos\alpha} t^n u_{j-1/2}^n \\
&\left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2\cos\alpha} t^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2\cos\alpha} t^n f_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\
&\frac{3}{2\cos\alpha} t^n v_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2\cos\alpha} t^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\
&- Mt^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = - \left( \frac{1}{D} \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) \right. \\
&+ \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^n \left. \right) - \frac{3}{2\cos\alpha} t^n (1 - u_{j-1/2}^n + (f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n)) - Mt^n (1 - u_{j-1/2}^n) \\
&+ 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n + R_1
\end{aligned}$$

#### 4. Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
&g \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + g \left( \frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{2} \left( q_{j-1/2}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
&+ \frac{3}{2\cos\alpha} Pr t^n \left( f_{j-1/2}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( q_{j-1/2}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
&- 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} \left( s_{j-1/2}^n + \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) = R_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow g \left( \frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{2} \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2\cos\alpha} Pr t^n \\
&\left( \left( f_{j-1/2}^n \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \left( q_{j-1/2}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \left( \frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{l_j} \right) \right. \\
&\left. \left( \frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) \right) - 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} \left( \frac{\delta s_j - \delta s_{j-1}}{2} \right) = - \left( g \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \right. \\
&+ Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{2} q_{j-1/2}^n + \frac{3}{2\cos\alpha} Pr t^n (f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n) \left. \right) + 2Pr \frac{t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n + R_2
\end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
R_1 &= -\frac{1}{D} \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \alpha} t^n \left( 1 - \left( u_{j-1/2}^{n-1} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1} \right) + M t^{n-1} (1 - u_{j-1/2}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^{n-1} \\
R_2 &= -g \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) - Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{2} q_{j-1/2}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t^{n-1} f_{j-1/2}^{n-1} q_{j-1/2}^{n-1} \\
&\quad - 2 Pr \frac{t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= - (f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= - (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= - (s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (q_j^n + q_{j-1}^n) \\
(r_4)_j &= - \frac{1}{D} \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^n - \frac{3}{2 \cos \alpha} t^n \left( 1 - \left( u_{j-1/2}^n \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n \right) \right) - M t^n (1 - u_{j-1/2}^n) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n \\
&\quad - \frac{1}{D} \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} v_{j-1/2}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \alpha} t^{n-1} \left( 1 - \left( u_{j-1/2}^{n-1} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1} \right) \right) - M t^{n-1/2} (1 - u_{j-1/2}^{n-1}) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^{n-1} \\
(r_5)_j &= -g \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_i} - \frac{Pr}{2} \eta_{j-1/2} q_{j-1/2}^n - \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t^n (f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n) \\
&\quad - 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n - g \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_i} - \frac{Pr}{2} \eta_{j-1/2} q_{j-1/2}^{n-1} \\
&\quad - \frac{3}{2 \cos \alpha} Pr t^{n-1} (f_{j-1/2}^{n-1} q_{j-1/2}^{n-1}) + 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^{n-1} \\
(a_1)_j &= \frac{3}{4 \cos \alpha} t^n (v_{j-1/2}^n) \\
(a_2)_j &= (a_1)_j \\
(a_3)_j &= - \frac{3}{2 \cos \alpha} t^n u_{j-1/2}^n - \frac{M t^n}{2} - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
(a_4)_j &= (a_3)_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_5)_j &= \frac{1}{Dl_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{4 \cos \alpha} t^n (f_{j-1/2}^n) \\
(a_6)_j &= -\frac{1}{Dl_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{4 \cos \alpha} t^n (f_{j-1/2}^n) \\
(b_1)_j &= g \frac{1}{l_j} + Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{4 \cos \alpha} Pr t^n (f_{j-1/2}^n) \\
(b_2)_j &= -g \frac{1}{l_j} + Pr \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{4 \cos \alpha} Pr t^n (f_{j-1/2}^n) \\
(b_3)_j &= \frac{3}{4 \cos \alpha} Pr t^n q_{j-1/2}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= -Pr \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan di atas maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta u_N = 0, \delta s_N = 0$



## Lampiran 9

### 6.9 Hasil Numerik

#### 6.9.1 Physical Case

Tabel 6.1: Profil Kecepatan dan Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) Pada Partikel Cu saat  $\eta = 1$  ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.2$ )

M	f	s
0	0	1
1	0.749228136	0.930698733
2	0.938753673	0.861686972
3	0.985303539	0.793401279
4	0.996566877	0.72636726
5	0.999220353	0.661106334
6	0.999827297	0.598103182
7	0.99996265	0.537789966
8	0.999992127	0.480536562

Tabel 6.2: Profil Kecepatan dan Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik ( $M$ )  $Al_2O_3$  Pada Partikel  $\eta = 1$  ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $Al_2O_3$  ( $M$ ) ( $Pr = 0.7$ ,  $\theta_s = 53^\circ$ ,  $\chi = 0.2$ )

M	f	s
0	0	1
1	0.67466849	0.930919467
2	0.895880902	0.8621063
3	0.967090784	0.793974867
4	0.989748227	0.72703859
5	0.996857318	0.661818831
6	0.999052083	0.598806624
7	0.999718566	0.538443167
8	0.999917738	0.481108174

Dari tabel diatas dapat terlihat perbedaan antara partikel  $Cu$  dan partikel  $Al_2O_3$  pada variasi parameter magnetik.

## **BAB 6**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

#### **6.1 Kesimpulan**

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa:

- 1.) Model matematika magnetohidrodinamik (MHD) fluida nano tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati bola teriris dibangun oleh tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi yang masing-masing diperoleh dari penerapan Hukum Kekekalan Massa, Hukum II Newton, dan Hukum I Termodinamika. Setelah mengetahui persamaan pembangunnya kemudian diubah ke dalam bentuk persamaan non-dimensi, dan dilakukan transformasi ke dalam bentuk persamaan similaritas untuk mendapatkan bentuk model akhir dari aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris.
- 2.) Model matematika aliran tak tunak fluida nano magnetohidrodinamik (MHD) yang melewati bola teriris dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik yaitu metode Keller-Box. Penyelesaian numerik ini diawali dengan mengubah model matematika kebentuk persamaan orde satu. Kemudian model matematika didiskritisasi dengan beda hingga pusat. Model matematika hasil diskritisasi berupa sistem persamaan yang tak linier, sehingga dilakukan linierisasi model dengan Metode Newton, dan diselesaikan dengan Metode Eliminasi Matriks Blok Tridiagonal.
- 3.) Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, sudut irisan, dan *volume fraction nano fluid*, densitas fluida nano, kapasitas panas fluida nano didapatkan bahwa:
  - a.) Semakin besar nilai parameter magnetik ( $M$ ) maka profil kecepatan fluida yang dihasilkan semakin besar, akan tetapi profil temperaturnya semakin kecil.
  - b.) Tidak terdapat pengaruh  $\eta$  secara signifikan terhadap berapapun nilai variasi Pr yang diberikan. Akan tetapi terlihat bahwa semakin besar nilai

$\eta$  maka semakin meningkat profil kecepatan, semakin besar bilangan Prandtl yang digunakan maka semakin kecil temperatur fluida yang dihasilkan.

- c.) Semakin besar sudut irisan maka profil kecepatan semakin besar sedangkan profil temperatur semakin kecil.
- d.) Profil kecepatan variasi *nanoparticle volume fraction* ( $\chi$ ) semakin meningkat pada saat nilai  $\chi$  adalah  $0 \leq \chi \leq 0.5$  dan semakin berkurang pada saat nilai  $\chi$  adalah  $0.6 \leq \chi \leq 0.9$ , semakin besar nilai  $\chi$  maka semakin meningkatkan profil temperatur fluida nano.
- e.) Nilai densitas fluida nano meningkat maka profil kecepatan besar sedangkan profil temperature kecil.
- f.) Semakin besar nilai kapasitas panas fluida nano ( $\rho C_{ND}$ ) maka profil kecepatan semakin besar akan tetapi nilai tiap  $\eta$  akan menjadi konstan dan profil temperatur juga semakin kecil.

## 6.2 Saran

- 1.) Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi tidak pada titik stagnasi atau ( $x \neq 0$ ), sehingga dapat dilihat profil temperatur dan kecepatan disekeliling permukaan bola teriris.
- 2.) Pada penelitian ini penelitian dilakukan pada aliran medan magnet yang tidak mengalami induksi, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian dengan memperhitungkan adanya induksi medan magnet.
- 3.) Pada penelitian ini tidak terdapat perpindahan panas atau konveksi yang terjadi sehingga diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat disertakan perpindahan panas atau konveksi.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alkawasbeh, H., T. 2015, Numerical Solution for Convection Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere of Newtonian and Non-Newtonian Fluid. Universiti Malaysia Pahang. Malaysia.
- [2] Arber, T. 2013. Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD). University of Warwick. UK.
- [3] Cheng, C.Y. (2012), "Free Convection Boundary Layer Flow Over a Horizontal Cylinder of Elliptic Cross Section in Porous Media Saturated by a Nanofluid", International Communications in Heat and Mass Transfer 39, 1-4: 931-936.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0735193312001133>
- [4] Choi, U.S. (1995) *Enhancing Thermal Conductivity of Fluids with Nanoparticles*, Developments and Applications of Non-Newtonian Flows, D.A. Siginer and H.P. Wang, eds., FED. Vol. 231/MD-Vol. 66, ASME. New York.
- [5] Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Layer Flow of Viscous Elastic Fluid*, Universiti Technology Malaysia, Malaysia.
- [6] Liu, D. & Yu, L. (2011). *Single-Phase Thermal Transport of Nanofluids in a Minichannel*, Journal of Heat Transfer, Vol. 133, 031009-1.
- [7] Mohammad, N. F. (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere In Viscous and Micropolar Fluids*, University Technology Malaysia, Malaysia.
- [8] Mohamed, M. K. A., Salleh, M.Z., Hussanan, A., Sarif, N.Md., Noar, N.A.Z.M., Ishak, A., dan Widodo, B. (2016). Mathematical Model of Free Convection Boundary Layer Flow on Solid Sphere with Viscous Dissipation and Thermal Radiation, International Journal of Computing Science and Applied Mathematics, Vol 2 No.2.
- [9] Nazar, R. (2004), *Mathematical Models for Free and Mixed Convection Boundary Layer Flow of Micropolar Fluids*, Universiti Technology Malaysia, Malaysia.

- [10] Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan,B.H. (2008), *Schaums Outline Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.
- [11] Potter, M.C.,Wiggert, D.C., dan Ramadan,B.H. (2012), *Mechanics of Fluids Fourth Edition*, Cengage Learning, USA.
- [12] Putra, Nandy. 2002. *Heat Transfer in Dispersed Media*, Aachen : Shacker Verlag,
- [13] Putra, Nandy., Noviar, Fred S., Wijaya, Hery., Koestoer, RA. 2005. "Kenaikan Koefisien Perpindahan Kalor Kondensasi Film pada Kondenser Silinder Vertikal dengan NanoFluida Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>air sebagai Fluida Pendingin".  
<https://www.scribd.com/doc/147>
- [14] Roetzel. (2003). *Temperature dependence of thermal conductivity enhancement for nanofluids*, Journal of Heat Transfer , Vol. 125, hal.567-574.
- [15] Salleh, M. Z., Nazar, R., dan Pop, I. (2010). "Free Convection Boundary Layer Flow on a Sphere with Newtonian Heating", Vol. 62, No. 4, hal.263-274.  
<http://am.Ippt.pan.pl/am/article/viewFile/v62p283/pdf>
- [16] S.K. Das, N. Putra, W. Roetzel, (2003). *Pool boiling characteristics of nanofluids*, Journal of Heat and MassTransfer, Vol. 46, hal.851-862
- [17] Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, itspress, Surabaya.
- [18] Widodo, B., Khalimah, D. A., Zainal, F. D. S., dan Imron, C. (2015). The Effect of Prandlt Number and Magnetic Parameters on Unsteady Magneto-hidrodinamic Forced Convection Boundary Layer Flow of A Viscous Fluid Past A Sphere. International.
- [19] Widodo, B., Imron, C., Aisyah, N., Siswono, G., Rahayuningsih, T., dan Purbandini. (2016). Viscoelastic Fluid Flow Past A Porous Circular Cylinder When The Magnetic Field Included, Far East Journal Matjematical and Sciences (Puspa Publising House India), Vol 99 No.2: 173-186.
- [20] Widodo, B., Anggriani, I., Khalimah., D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2016).Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past A Sphere, Far East Journal Matjematical and Sciences (Puspa Publising House India), Vol 100 No.2: 291-299.

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Yunita Nur Afifah, dilahirkan di Surabaya, 18 Juni 1991 dan merupakan anak kedua dari dua bersaudara pasangan Almuni Rofiq dan Suyati. Pendidikan formal ditempuh mulai dari SDN 1 Karang Pilang Surabaya, lulus pada tahun 2003 dilanjutkan ke pendidikan SMP Negeri 24 Surabaya lulus pada tahun 2006, dan melanjutkan pendidikan ke SMA Wachid Hasyim 2 Taman, lulus pada tahun 2009. Kemudian pada tahun 2010 penulis melanjutkan pendidikan S1 di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas PGRI Adi Buana Surabaya, lulus pada tahun 2014 dan melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: [yunita14@mhs.matematika.its.ac.id](mailto:yunita14@mhs.matematika.its.ac.id) dan [yunitanurafifah02@gmail.com](mailto:yunitanurafifah02@gmail.com)..